OLIMPIADA NAȚIONALĂ
DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

IAȘI
EDIȚIA a XXI-a
24-29 MAI 2024
PROBA TEORETICĂ SCRISĂ
BAREM DE NOTARE
CATEGORIA JUNIORI 2

- **Se punctează oricare alte formulări/modalităţi de rezolvare corectă a cerinţelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare la subiectele de tip grilă.**
- **Durata probei este de 3 ore.**

<u>Subiectul I (10 puncte)</u>

1. Răspuns corect: **c) (1 punct)**

$$\left(D = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,379} = 2,64\,pc \cdot 3,26al = 8,61al \right)$$

2. Răspuns corect: **d) (1 punct)**

$$\left(\begin{array}{l} \lg \dfrac{E_1}{E_2} = 0,4\left(m_2 - m_1\right) \\ E_1 = 2,512E_2 \\ E_{sistem} = E_1 + E_2 = 3,512E_2 \\ \lg \dfrac{E_2}{E_{sistem}} = 0,4\left(m - m_2\right) \\ m = 2,618 \end{array} \right)$$

3. Răspuns corect**: c) (1 punct)**

$$\left(\begin{array}{l}\text{La data de 22 decembrie } \delta = -\ 23°27' \\ \text{de unde rezultă că } h_1 = 90° - \varphi + \delta. \\ \text{Dar la orizont } h_1 = 0. \\ \text{Deci } \varphi = 90° + \delta = 90° - 23°27' = 66°33'\end{array}\right)$$

4. Răspuns corect: **a) (1 punct)**

5. Răspuns corect: **d) (1 punct)**

6. Răspuns: **d) (1 punct)**

7. Răspuns: **c) (1 punct)**

8. Răspuns**: b) (1 punct)**

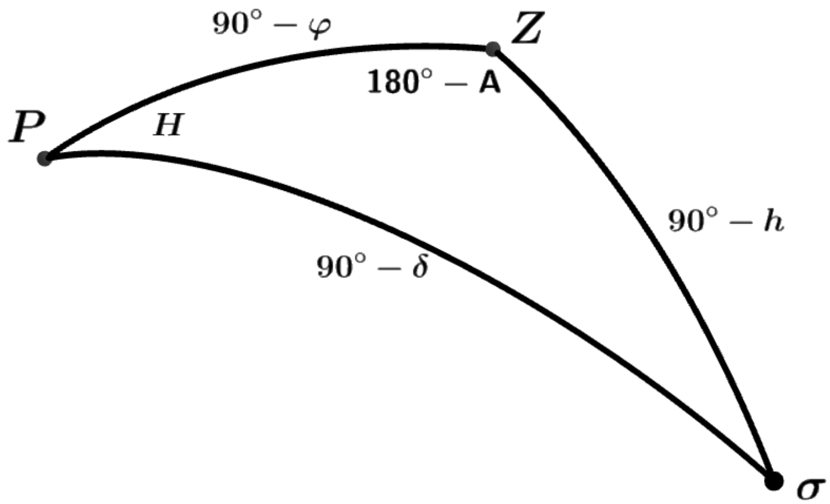
9. Răspuns: **a) (1 punct)**

10. Răspuns**: b) (1 punct)**

<u>Subiectul II (15 puncte)</u>

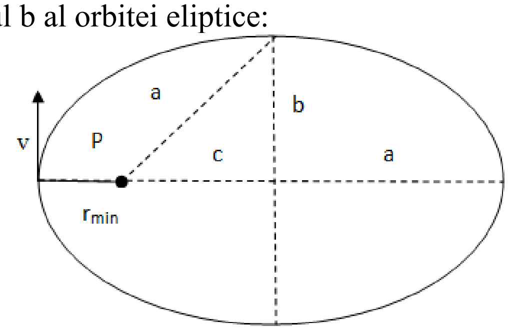
II.1. Latitudinea obsevatorului (7 puncte)

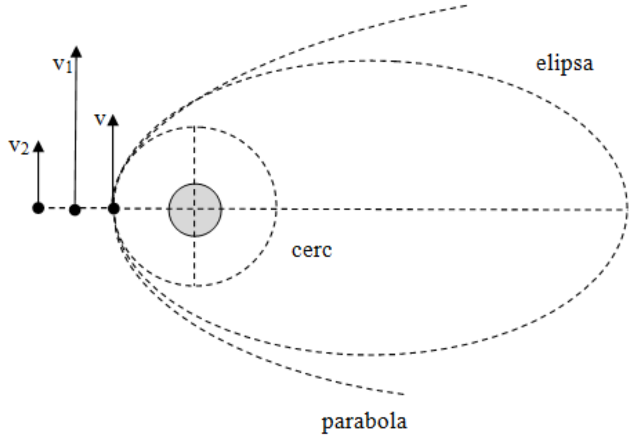
Rezolvare	**Punctaj**
Fie (α_1,δ_1), respectiv (α_2,δ_2), coordonatele ecuatoriale ale stelelor date. Stelele sunt pe ecuator, atunci: $\delta_1 = \delta_2 = 0^\circ$. Diferența dintre ascensiile drepte este egală cu β, atunci $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta$.	**0,5 puncte**
Stelele sunt observate la momentul de timp sideral s. Atunci $s = H_1 + \alpha_1 = H_2 + \alpha_2$. Rezultă că $H_2 - H_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta$. (1)	**0,5 puncte**

<table>
<tr><td>Desen: Triunghiul nautic al stelei PZ=90˚ - φ, Zσ=90˚ - h , Pσ=90˚ - δ, măs(ZPσ)=H.

</td><td>1,5 puncte</td></tr>
<tr><td>Din triunghiul nautic al stelei, aplicând teorema cosinusului pentru latura Zσ, după câteva transformări simple, obținem:
sin h = sin φ sin δ+cos φ cos δ cos H. (2)</td><td>1 punct</td></tr>
<tr><td>Stelele date sunt pe ecuator, δ=0˚, de aceea (2) ne conduce la
sin h= cos φ cos H_1 (3), respectiv
sin h=cos φ cos H_2 (4).</td><td>1 punct</td></tr>
<tr><td>Stelele sunt observate la aceeași înalțime deasupra orizontului, de aceea obținem
cos φ cos H_1= cos φ cos H_2. (5)</td><td>0,5 puncte</td></tr>
<tr><td>Cazul I: Dacă cos φ este diferit de zero, (5) ne conduce la
H_1= - H_2, relație care împreună cu (1) conduce la
H_1= - H_2=(-1/2) β. (6)</td><td>0,5 puncte</td></tr>
<tr><td>Din (3) și (6) obținem cos φ =sin h/cos(β/2).</td><td>0,5 puncte</td></tr>
<tr><td>Cazul II: Dacă cos φ =0, atunci φ=+90˚ sau φ=-90˚, adică observatorul ar fi la polul geografic nord sau sud.</td><td>0,5 puncte</td></tr>
</table>

Cazul φ=-90˚ nu convine pentru că observatorul este în emisfera nordică.	
Rezultat final cos φ =sin h/cos(β/2) sau φ=+90˚.	**0,5 puncte**
Total	**7 puncte**

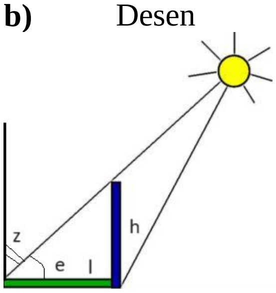
II.2. Navă spațială și satelit (8 puncte)

REZOLVARE:	Punctaj
a) La distanţa minimă faţă de centrul Pământului, viteza navetei spațiale cu satelitul pe orbita eliptică va fi: $v = v_{\max} = \sqrt{kM_P\left(\frac{2}{r_{\min}} - \frac{1}{a}\right)}$; $r_{\min} = \frac{p}{1+e} = \frac{a(1-e^2)}{1+e}$; $r_{\min} = a(1-e); r_{\max} = a(1+e); r_{\min} = 3R$; $a = \frac{3R}{1-e}$;	**1,5p**
Determinăm elementul b al orbitei eliptice:  $a^2 = b^2 + c^2$; $c = a - r_{\min}$; $a^2 = b^2 + (a - r_{\min})^2$; $b^2 = (2a - r_{\min})r_{\min}$; $b = 3R\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$;	**1,5p**

Pentru elementul c al orbitei eliptice, utilizăm expresiile găsite la punctul anterior: $c=\frac{3R}{1-e}-3R=\frac{3Re}{1-e}$.	**1p**
b) Viteza navetei cu satelitul v, viteza minimă de evadare a satelitului v_1 şi a navetei v_2 după lansarea satelitului la perigeul orbitei vor fi: 	**1p**
$v=v_{max}=\sqrt{kM_P\left(\frac{2}{3R}-\frac{1-e}{3R}\right)}$; $v_{max}=\sqrt{\frac{kM_P}{3R}(1+e)}$; $v_1=\sqrt{\frac{2kM_P}{3R}}$;	**1,5p**
Dacă naveta va evolua după expulzarea satelitului pe un cerc, viteza ei va fi: $v_2=\sqrt{\frac{kM_P}{r_{min}}};v_2=\sqrt{\frac{kM_P}{3R}}$; $\frac{v}{v_1}=\sqrt{\frac{1+e}{2}}$; $\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.	**1,5p**
TOTAL	**8p**

<u>Subiectul III (25 puncte)</u>

III.1. Naufragiați pe insulă (12 puncte)

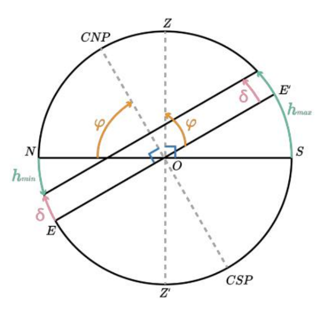
a) Întrucât gnomonul nu lasa umbră, Soarele se află la zenit. Acest lucru se poate întâmpla doar în zona dintre tropicul Racului si tropicul Capricornului. Prin urmare, naufragiatii se află la tropice. Avand in vedere faptul ca în luna decembrie umbra gnomonului este mai mare decât în luna iunie, rezultă că insula se află în emisfera sudică.	**0,5 p** **0,5 p**
b) Desen  h=înaltimea gnomonului l=lungimea umbrei z=distanța zenitală a Soarelui e=înălțimea Soarelui deasupra orizontului Lungimea umbrei gnomonului se afla cu relația: $l = h\tan z$	**0,5 p**
$e = 90^0 + \varphi - \delta = 90^0 - z \rightarrow z = \delta - \varphi$ $z > 0 \rightarrow z = \pm(\delta - \varphi)$	**1 p**
In decembrie avem lungimea maximă a umbrei: $l_d = h\tan(\varphi + 23^o 26')$	**0,5 p**
In iunie avem lungimea minimă a umbrei $l_i = h\tan(-\varphi + 23^o 26')$	**0,5 p**
Prin urmare: $\frac{l_i}{l_d} = \frac{h\tan(-\varphi + 23^o 26')}{h\tan(\varphi + 23^o 26')} = 1,5$ $\tan(-\varphi + 23^o 26') = 1,5\tan(\varphi + 23^o 26')$	**1 p**

În urma rezolvării ecuației găsim: $\varphi = -4^o 12'$	**0,5 p**
c) Pentru a găsi procentul din sfera cerească vizibilă folosim formula: $\frac{A}{A_0} = \frac{2\pi(1+\cos\varphi)}{4\pi} = \frac{(1+\cos(-4^0 12'))}{2} = 0,998$ $\frac{A}{A_0} = 99,8\%$	**2 p**
d) Putem determina unghiul orar al unui astru pe baza declinației, latitudinii geografice a locului și a distanței zenitale. $\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos H$ $\cos H = \frac{\cos z - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}$	**1,5 p**
În momentul în care partea inferioară a discului solar atinge orizontul, distanța zenitală a centrului discului solar este: $z_1 = 90^o - 16' + 35' = 90^o 19'$	**0,5 p**
În momentul în care partea superioară a discului solar trece sub orizont, avem: $z_2 = 90^o + 16' + 35' = 90^o 51'$	**0,5 p**
Durata apusului se poate calcula folosind relația: $\Delta t = \cos^{-1}\frac{\cos z_2 - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi} - \cos^{-1}\frac{\cos z_1 - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}$	**1 p**
Prin urmare, la solstiții vom avea:	**0,5 p**

$\Delta t = \cos^{-1}\left(\frac{\cos 90^o 51' - \sin 23^o 26' \sin\left(-4^o 12'\right)}{\cos 23^o 26' \cos\left(-4^o 12'\right)}\right) -$ $- \cos^{-1}\left(\frac{\cos 90^o 19' - \sin 23^o 26' \sin\left(-4^o 12'\right)}{\cos 23^o 26' \cos\left(-4^o 12'\right)}\right)$ $\Delta t = 140 s$	
Iar la echinoctii: $\Delta t' = \cos^{-1}\left(\frac{\cos 90^o 51' - \sin 0^o \sin\left(-4^o 12'\right)}{\cos 0^o \cos\left(-4^o 12'\right)}\right) -$ $- \cos^{-1}\left(\frac{\cos 90^o 19' - \sin 0^o \sin\left(-4^o 12'\right)}{\cos 0^o \cos\left(-4^o 12'\right)}\right)$ $\Delta t' = 128 s$	**0,5 p**
Diferența este de 12 s.	**0,5p**

III.2. Antares văzut prin telescop, de la Iași (13 puncte)

a.	**3p**
Distanța unghiulară a sistemului trebuie să fie mai mare decât puterea separatoare a telescopului: $\theta_{min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \approx 5.5 \cdot 10^{-7}\, rad \approx 0{,}12''$	**1p**
Distanța unghiulară se poate calcula utilizând aproximația pentru unghiuri mici: $\frac{\Delta}{2} \approx \tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{d}{2x}$ Unde distanța sistem-observator x se calculează cu ajutorul paralaxei: $p('') = \frac{1\, UA}{x\,(pc)} \Rightarrow x \approx 170\, pc \Rightarrow \Delta \approx 0{,}017''$	**1p**

Cum $\Delta < \theta_{min}$, stelele nu pot fi distinse de instrument.	**1p**
b.	**4p**
Conform legii a doua a lui Pogson între magnitudinea sistemului și magnitudinea uneia dintre stele: $$m_s - m_1 = -2{,}5\lg\frac{E}{E_1} = -2{,}5\lg\frac{L_1+L_2}{4\pi d^2}\frac{4\pi d^2}{L_1} \Rightarrow m_s = m_1 - 2{,}5\lg\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)$$	**2p**
Aplicăm același algoritm între cele două stele, obținem: $$\frac{L_2}{L_1} = 10^{-0{,}4(m_2-m_1)} \approx 47.863$$	**1p**
Înlocuind, obținem: $$m_s \approx 0.938^m < 6^m$$ Deci sistemul poate fi văzut cu ochiul liber.	**1p**
c.	**3p**
Magnitudinea limită a telescopului se calculează conform: $$m_{lim} = 6 + 5\lg\frac{D}{d}$$	**2p**
Înlocuind, obținem: $$m_{lim} \approx 17.541^m$$	**1p**
d.	**3p**
Din figura de mai jos, formăm un unghi drept:  $$90° = \varphi + \delta + h_{min}$$	**1p**
De aici, scoatem înălțimea	**1p**

$$h_{min} = 90° - \delta - \varphi$$	
Înlocuind, obținem $$h_{min} = 69°\,16'11''$$ Cum înălțimea măsurată sub Orizont este pozitivă, steaua nu este una circumpolară.	**1p**
Total	**13p**