

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
- ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a X - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Se consideră numărul complex z , cu proprietatea că $|z| < \frac{1}{2}$. Demonstrați că

$$|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{3}{4}.$$

2. Se consideră M_0, M_1, M_2 imaginile în planul complex ale rădăcinilor ecuației $z^3 = 1$.

Dacă $M(\cos t + i \sin t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se demonstreze că $MM_2 = MM_0 + MM_1$.

3. a) Se consideră $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi. Demonstrați că

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

- b) Se consideră $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni mai mari ca 1. Demonstrați

$$\text{că } \lg \left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right) \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Să se verifice dacă există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, \forall x \in \mathbb{R}.$$