



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că:

$$(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 + (-x+y+z)^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2$$

b) Demonstrați că numărul $4024^2 + 4026^2 + 4028^2$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale, nenule, pătrate perfecte.

Ștefan Smărăndoiu

c) Dacă $a = 2^{2013}$, $b = 3^{2013}$ și $c = 6^{-2013}$, atunci arătați că:

$$\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1.$$

Ileana și Alexandru Statie

SUBIECTUL al II-lea

a) Să se demonstreze că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ și $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$.

c) Arătați că $\frac{x^3}{y^2(x+2z)} + \frac{y^3}{z^2(y+2x)} + \frac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq 1$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

Dumitru Dobre și Cecilia Deaconescu

SUBIECTUL al III-lea

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA . Lungimile segmentelor $[AM]$, $[AB]$ și $[AD]$ sunt direct proporționale cu numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{6}$, iar distanța de la punctul M la dreapta BD este egală cu 8 cm .

a) Aflați măsura unghiului dintre planele (MBD) și (ABC) .

b) Demonstrați că dreapta BD și $(MAD) \cap (MBC)$ sunt drepte necoplanare.

c) Aflați distanța de la punctul C la planul (MBD) .

Leon Genoiu și Marius Giurgiu

SUBIECTUL al IV-lea

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ notăm cu M, N , respectiv P , proiecțiile punctului C pe dreptele AB', AD' , respectiv $B' D'$. Demonstrați că:

a) AC', BD' și $A'C$ sunt concurente;

b) $BM \perp AB'$;

c) Dreptele AP , $B'N$ și $D'M$ sunt concurente.

Ion Tudor, G.M. Nr. 3/2012

Subiectele au fost selectate de Ștefan Smărăndoiu, inspector de specialitate.