



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

Clasa a XI – a

1. Feladat Adott a következő mátrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in M_4(\mathbb{R})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 7, & \text{ha } i = j \\ 5, & \text{ha } i \neq j \end{cases}, \text{ minden } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Számítsd ki A^n , ha $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Feladat Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám és tekintsük a következő halmazt:

$$M = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \mid A \neq B \text{ és } AB = A + B\}.$$

a) Igazold, hogy az M halmaznak végtelen sok eleme van;

b) Igazold, hogy ha $(A, B) \in M$, akkor $AB = BA$.

3. Feladat Számítsd ki:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k!}{b^k}, \text{ ahol } a, b \in (0, +\infty); \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

4. Feladat Tekintsük az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, ahol $x_0 = \sqrt{2}$ és $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$, bármely $n \in \mathbb{N}$. Mutasd ki, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat korvergens és számítsd ki a határértékét.

¹Munkaidő 3 óra;

²Minden feladat kötelező;

³Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.