

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ

BAREM
Clasa a VII-a

SUBIECTUL I (7p)

a) Se consideră numerele $x = 19 - 4\sqrt{21}$, $y = 31 + 4\sqrt{21}$ și $z = 34 + 6\sqrt{21}$. Calculați $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}$.

b) Arătați că ecuația $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1009}} + \frac{1}{\sqrt{2018-x} + \sqrt{1009}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2018-x}}$ are 2019 soluții în mulțimea numerelor întregi.

Rezolvare:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = \sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(2\sqrt{7} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(3\sqrt{3} + \sqrt{7})^2} = |2\sqrt{3} - \sqrt{7}| + |2\sqrt{7} + \sqrt{3}| - |3\sqrt{3} - \sqrt{7}| = 0$ 3p

b) Rationalizand avem $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1009}}{x-1009} + \frac{\sqrt{2018-x}-\sqrt{1009}}{1009-x} = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2018-x}}$ 1p

Dupa inmultirea mezelor si extremilor obtinem $x - (2018 - x) = 2(x - 1009)$ care este o relatie adevarata pentru orice x numar intreg, 1p

cu conditia existentei radicalilor, si anume $x=0,1, \dots, 2018$ 1p

Observam ca relatia de mai sus nu exista pentru $x=1009$. Inlocuind $x=1009$ in ecuatia initiala se verifica si pentru aceasta valoare. In concluzie avem 2019 solutii intregi. 1p

SUBIECTUL II (7p)

Fie ABCD un pătrat, punctul M simetricul lui B față de A și $N \in (AC)$ astfel încât $m(\widehat{AMN}) = 15^\circ$.

Arătați că $MN=AC$.

Rezolvare

Fie P simetricul lui D fata de A.

Triunghiurile MAN si PAN sunt congruente (L.U.L., AM=AP, AN latura comună, si

$m(\angle MAN)=m(\angle NAP)=135^\circ$), si deci $MN=NP$ 3p

Pe de alta parte, triunghiul MAP este dreptunghic isoscel cu $m(\angle AMP)=45^\circ$ si astfel $m(\angle PMN)=60^\circ$,

făcând triunghiul MNP echilateral. 3p

Astfel $MN=MP$, iar MP este, evident, de aceeași lungime cu AC. 1p

SUBIECTUL III (7p)

Se consideră șirul de numere $\sqrt{23}, \sqrt{56}, \sqrt{89}, \sqrt{1112} \dots \sqrt{20182019}$.

a) Al câtelea termen este $\sqrt{20182019}$? Scrieți al 2018-lea termen.

b) Demonstrați că orice termen al șirului este număr irațional.

Rezolvare

a) Se observă că primele numere din componența numerelor de sub radical sunt 2, 5, 8, 11, ... 2018 care pot fi scrise ca $2018 = 2 + 3 \cdot 672$, deci ultimul termen este al 673-lea termen 2p
Termenul al 2018-lea începe cu $2+3 \cdot 2017=6053$, adică $\sqrt{60536054}$ 1p

b) Numerele de sub radical sunt de forma $3k+2$, deoarece descompuse în baza 10 au forma 2p
 $(3t+2) \cdot 10^k + 3t+3 = (3t+2)(M_3+1) + (3t+3) = M_3+2$, iar numerele de această formă nu pot fi pătrate perfecte, ca atare radicalii sunt numere iraționale2p

SUBIECTUL IV (7p)

Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB=AC$, M un punct pe dreapta AB cu $B \in (AM)$, N pe dreapta AC cu $N \in (AC)$ și $BM=CN$, iar $MN \cap BC = \{T\}$.

a) Să se arate că T este mijlocul segmentului MN.

b) Să se arate că $MN > BC$.

Rezolvare

a) Fie $NP \parallel AB$, $P \in BC$ 2p
Triunghiul NPC este isoscel deoarece $\angle NPC = \angle B = \angle C$ și astfel $NP=NC$ 1p
Cum $NP \parallel BM$ și $NP=NC=MB$, patrulaterul BMPN este paralelogram, iar intersecția diagonalelor T este mijlocul diagonalei MN 1p

b) Fie $MD \perp BC$, $NE \perp BC$, $D, E \in BC$. Din congruența triunghiurilor MBD și NCE (I.U.) avem că $DB=EC$, deci $BC=DE$ 1p
Cum triunghiul DMT este dreptunghic, $MT > DT$, și analog triunghiul ENT, $TN > TE$.
Adunând aceste relații avem
 $MN=MT+TN > DT+TE=DE=BC$, deci $MN > BC$ 2p