

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ , 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a X -a

SOLUTII SI BAREME:

Problema 1: Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$4^x + 15^x = 10^x + 9^x$$

Selectată de prof. Sabou Manuela, A.P.I. Zalău

Soluție: Ecuația se poate scrie sub forma:

$$5^x(3^x - 2^x) - (3^x - 2^x)(3^x + 2^x) = 0 \Leftrightarrow (3^x - 2^x)(5^x - 3^x - 2^x) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Rezolvarea ecuației : } 3^x - 2^x = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Rezolvarea ecuației : } 5^x = 3^x + 2^x \dots\dots\dots 3p$$

Problema 2: Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} 3^{2x+1} + 3^{2y+1} + 3^{2z+1} = 81 \\ \log_3(2x+1) + \log_3(2y+1) + \log_3(2z+1) = 3 \end{cases}$$

Selectată de prof. Lucaci Simona, C.N.S. Zalău

Soluție: Condiții de existență:

$$2x+1 > 0, 2y+1 > 0, 2z+1 > 0 \Rightarrow x, y, z > -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din a 2-a ecuație a sistemului obținem: } (2x+1)(2y+1)(2z+1) = 27 \dots\dots\dots 1p$$

Folosind inegalitatea mediilor avem:

$$3^{2x+1} + 3^{2y+1} + 3^{2z+1} \geq 3\sqrt[3]{3^{2x+1} \cdot 3^{2y+1} \cdot 3^{2z+1}} = 3\sqrt[3]{3^{(2x+1)+(2y+1)+(2z+1)}} \dots\dots\dots 2p$$

Dar, $3 \cdot 3^{\frac{(2x+1)+(2y+1)+(2z+1)}{3}} \geq 3 \cdot 3^{\frac{3(2x+1)(2y+1)(2z+1)}{3}} = 3 \cdot 3^{\frac{3}{27}} = 3 \cdot 3^3 = 81 \dots\dots\dots 2p$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă:

$$2x+1 = 2y+1 = 2z+1 \Rightarrow x = y = z \Rightarrow 3 \cdot 3^{2x+1} = 81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{2x+1} = 27 \Rightarrow 2x+1 = 3 \Rightarrow x = 1$$

Soluția sistemului este: $x = 1, y = 1, z = 1 \dots\dots\dots 1p$

Problema 3: Afizele z_1, z_2, z_3 ale vârfurilor triunghiului $A_1A_2A_3$ verifică condițiile:

1) $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1;$

2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = 3.$

Arătați că triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral.

Selectată de prof. Lucaciu Simona, C.N.S. Zalău

Soluție: Alegem sistemul de axe xOy astfel încât centrul cercului circumscris $\Delta A_1A_2A_3$ să fie reperul O

Avem: $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 =$
 $= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_2 + z_3)(\overline{z_2 + z_3}) + (z_3 + z_1)(\overline{z_3 + z_1}) \dots\dots\dots 1p$

Rezultă: $3 = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + |z_3|^2 + z_3\overline{z_1} + z_1\overline{z_3} + z_1\overline{z_1} \dots\dots 1p$

$3 = 3 + \overline{z_1}(z_1 + z_2 + z_3) + \overline{z_2}(z_1 + z_2 + z_3) + \overline{z_3}(z_1 + z_2 + z_3) \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) = 0 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 0 \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0 \dots\dots\dots 1p$

Din relația lui Sylvester avem: $z_H = z_1 + z_2 + z_3,$

unde H este ortocentrul $\Delta A_1A_2A_3$, deci $z_H = 0 \dots\dots\dots 1p$

Rezultă $O = H$, adică centrul cercului circumscris coincide cu ortocentrul $\Delta A_1A_2A_3$,

prin urmare $\Delta A_1A_2A_3$ este echilateral.....1p

Problema 4: Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $abc = a + b + c + 2$. Arătați că:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c}}. \quad (\text{G.M.})$$

Selectată de prof. Alexuțan Klara, A.P.I. Zalău

Soluție:

Deoarece $a, b, c > 0 \Rightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc = a + b + c + 2 \geq 3\sqrt[3]{abc} + 2 \dots\dots\dots 1p$

Notăm $\sqrt[3]{abc} = t \Rightarrow t^3 \geq 3t + 2 \Leftrightarrow (t + 1)^2(t - 2) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2 \dots\dots\dots 3p$

Atunci $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ac}}{2} \leq \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}}{2},$

unde am aplicat $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 3p$