

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VIII-a

SUBIECTE:

1. Demonstrați că produsul a patru numere naturale consecutive nenule, poate fi scris ca diferența pătratelor a două numere naturale nenule.

2. a) Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, are loc inegalitatea:

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

b) Fie $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}}$. Să se determine cel mai mare număr natural, mai mic sau egal decât $\frac{S}{10}$.

3. În cubul $ABCD A'B'C'D'$ de latură $2a$ se consideră punctul $S \in [CC']$. Notăm $\{O\} = BD \cap AC$ și $\{M\} = SO \cap A'C'$. Dacă planele $(A'BD)$ și (MBD) sunt perpendiculare, stabiliți poziția punctului S pe CC' .
(Problema E:14526 din Gazeta matematică Nr. 6-7-8/2013 – enunț modificat)

4. De aceeași parte a planului unui dreptunghi $ABCD$ se ridică pe acesta perpendicularele AE și DF . Se consideră punctul M pe latura (DC) astfel încât $\frac{DM}{DC} = \frac{1}{3}$. Știind că dreptele EM și BF sunt concurente în punctul O , iar $AD = 6$ cm, $AB = 9$ cm, $AE = 6$ cm, $DF = x$ cm, se cere:

a) Să se determine x ;

b) Să se calculeze distanța de la punctul A la planul (EBM) .

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VIII-a

BAREM de CORECTARE și NOTARE:

1. Dacă a este număr natural nenul, atunci $a(a+1)(a+2)(a+3) = (a^2+3a)(a^2+3a+2) = \dots\dots\dots$ 2p
 $= (a^2+3a)^2 + 2(a^2+3a) = \dots\dots\dots$ 1p
 $= (a^2+3a)^2 + 2(a^2+3a) + 1 - 1 = \dots\dots\dots$ 2p
 $= (a^2+3a+1)^2 - 1^2 = \dots\dots\dots$ 1p
 $= x^2 - y^2$, unde $x = a^2 + 3a + 1$, $y = 1$, sunt numere naturale nenule $\dots\dots\dots$ 1p

2. a)

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} - 2n < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 1 + 2n \Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1,$$

adevărat $\dots\dots\dots$ 3p

Analog inegalitatea a doua $\dots\dots\dots$ 1p

b) Se aplică inegalitățile de la punctul a) pentru $n \in \{1, 2, \dots, 2015\}$ și după adunare se obține:

$$2(-1 + \sqrt{2016}) < S < 2\sqrt{2015} \Leftrightarrow 87,7.. = 2(\sqrt{2016} - 1) < S < 2\sqrt{2015} = 89,7.. \Leftrightarrow 8,7 < \frac{S}{10} < 8,9$$

$\dots\dots\dots$ 2p

$$\Rightarrow \left[\frac{S}{10}\right] = 8. \dots\dots\dots$$
 1p

3. $(A'BD) \cap (MBD) = BD$; $\Delta A'BD$ este isoscel ($A'D$ și $A'B$ sunt diagonale ale fețelor cubului),

O este mijlocul $(BD) \Rightarrow A'O \perp BD$, (1). $\dots\dots\dots$ 1p

ΔMBD este isoscel ($\Delta MA'B \equiv \Delta MA'D$) $\Rightarrow MO \perp BD$, (2). $\dots\dots\dots$ 1p

Din (1) și (2) $\Rightarrow \angle((A'BD), (MBD)) = \angle A'OM$. $\dots\dots\dots$ 1p

$$\text{Din } \Delta OCS \sim \Delta A'OA \Rightarrow \frac{OC}{AA'} = \frac{SC}{AO} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{SC}{a\sqrt{2}} \Rightarrow SC = a \dots\dots\dots$$
 3p

$\Rightarrow S$ este mijlocul muchiei CC' . $\dots\dots\dots$ 1p

4. a) Fie planul $\alpha = (EBMF)$, $\alpha \cap (ABE) = EB$, $\alpha \cap (FDC) = FM$, $(ABE) \parallel (FDC) \Rightarrow$

$EB \parallel FM \dots\dots\dots$ 1p

Cum $FD \parallel EA$ și $AB \parallel DM \Rightarrow \Delta FDM \sim \Delta EAB \Rightarrow \dots\dots\dots$ 1p

$$\frac{FD}{EA} = \frac{DM}{AB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{9} \Rightarrow x = 2 \dots\dots\dots$$
 1p

b) Fie $AT \perp BM$, cum $EA \perp (ABC)$, utilizând teorema celor trei perpendiculare, rezultă

$ET \perp BM$, fie $AP \perp ET \Rightarrow AP \perp (EBM)$ (R.2t.3p.) $\Rightarrow d(A, (EBM)) = AP$ 2p

Se calculează $BM = 6\sqrt{2}$ cm, $AT = \frac{2 \cdot A_{AMB}}{MB} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$, $ET = \frac{3}{2}\sqrt{34}$, $AP = \frac{AE \cdot AT}{ET} = \frac{18\sqrt{17}}{17}$,

deci $d(A, (EBM)) = \frac{18\sqrt{17}}{17}$ cm. 2p