Inspectoratul Şcolar Judeţean Mehedinţi

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

1) Se dau permutările $\sigma, \tau \in S_4$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Să se arate că ecuaţia $x^2 \cdot \sigma^{2013} = \tau$ nu are soluţii în S_4.

2) Să se determine $X \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $X^{2013} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL II

Fie $A, B \in M_n(IR), n \in IN^*$. Să se arate că este adevărată relaţia: $Tr[A^n(AB - BA)] = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $Tr(X)$ este urma matricii X.

SUBIECTUL III

1) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$.

2) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \ln(n^2 + 1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n\geq 0}$ având proprietatea că $x_{n+1}^2 \leq 2013(2x_n - 2013)$, $\forall n \in IN^*$. Să se arate că şirul este convergent şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.