OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 16 februarie 2013

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Fie $U(\mathbb{Z}_{49})=\{x\in\mathbb{Z}_{49} \mid x \text{ este simetrizabil în raport cu înmulţirea } \}$.

a) Arătaţi că $(U(\mathbb{Z}_{49}),\cdot)$ este grup cu 42 de elemente.

b) Determinați ordinul lui $\widehat{30}$ în grupul $(U(\mathbb{Z}_{49}),\cdot)$.

c) Să se găsească în $(U(\mathbb{Z}_{49}),\cdot)$ un element de ordin 42.

Mihai Piticari şi Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie. a) $x\in\mathbb{Z}_{49}$, x inversabil $\Leftrightarrow (x,49)=1$. Cum $\varphi(49)=7\cdot 6=42\Rightarrow U(\mathbb{Z}_{49})$ are 42 de elemente. Deoarece $(\mathbb{Z}_{49},\cdot)$ este monoid $\Rightarrow (U(\mathbb{Z}_{49}),\cdot)$ este grup.

b) $\widehat{30}^{\,2}=\widehat{18}$, $\widehat{30}^{\,3}=\hat{1}\ \Rightarrow\ ord\left(\widehat{30}\right)=3$

c) $\forall\ x\in U(\mathbb{Z}_{49})$ avem $ord\, x \mid 42$. Conform teoremei lui Cauchy, există în G elemente de ordin 2, 3, respectiv 7. Avem $ord\left(-\hat{1}\right)=2\Rightarrow ord\left(\widehat{48}\right)=2$, iar $ord\left(\widehat{30}\right)=3$.

$(7k+1)^7=C_7^0\cdot(7k)^7+C_7^1\cdot(7k)^6+...+C_7^5\cdot(7k)^2+C_7^6\cdot 7k+C_7^7=M_{49}+1\ \Rightarrow ord\left(\hat{8}\right)=7$.

Atunci $ord\left(\widehat{48}\cdot\widehat{30}\cdot\hat{8}\right)=2\cdot 3\cdot 7=42\Rightarrow ord\left(\hat{5}\right)=42$

Barem.

a) $x\in\mathbb{Z}_{49}$, x inversabil $\Leftrightarrow (x,49)=1$.	1 p
$U(\mathbb{Z}_{49})$ are 42 de elemente.	1 p
$U(\mathbb{Z}_{49})$ este grup	1p
b) $\widehat{30}^{\,2}=\widehat{18}$, $\widehat{30}^{\,3}=\hat{1}\ \Rightarrow\ ord\left(\widehat{30}\right)=3$	1 p
c) Găsește un element de ordin 42	3 p

2. Fie k un număr natural nenul și $(G,\cdot)$ un grup cu n elemente. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) Pentru orice subgrup H al grupului G avem $H=\{a^k \mid a\in H\}$.

ii) $(k,n)=1$.

Gazeta Matematică, nr. 11/2012

Soluţie. $i)\Rightarrow ii)$ Presupunem prin absurd că există p prim, $p\mid(n,k)$. Cum $G\le G$, avem $G=\{a^k \mid a\in G\}$, deci funcția $f:G\to G$, $f(x)=x^k$ este surjectivă. Cum G este finit, rezultă că f este injectivă.

Fie $b\in G$ un element de ordin p. Deoarece $p\mid k$, avem $b^k=e$, deci $f(b)=b^k=e=f(e)$. Din injectivitate rezultă $b=e$, fals!

$ii) \Rightarrow i)$ Fie H un subgrup al lui G. Cum $\left\{a^k \;\middle|\; a \in H\right\} \subset H$ și H este finită, este suficient să arătăm că pentru $a, b \in H$ cu $a^k = b^k$ rezultă $a = b$. Deoarece $(k, n) = 1$, există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel ca $nu + kv = 1$. Atunci $a^k = b^k \Rightarrow a^{kv} = b^{kv} \Rightarrow a^{1-nu} = b^{1-nv} \Rightarrow a = b$, deoarece $a^n = b^n = e$.

Barem.

$i) \Rightarrow ii)$ $f : G \to G$, $f(x) = x^k$ este injectivă	2 p
Presupunem prin absurd că există p prim, $p \mid (n, k)$. Există $b \in G$ un element de ordin p	1 p
$b^k = e \Rightarrow f(b) = f(e) \Rightarrow b = e$, absurd!	1p
$ii) \Rightarrow i)$ Pentru $H \le G$, $\left\{a^k \;\middle|\; a \in H\right\} \subset H$	1 p
Deoarece $(k, n) = 1$, există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel ca $nu + kv = 1$.	1p
Finalizare	1p

3. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx$.

b) Calculați $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + x + 1}\,dx$.

***

Soluție. a) $$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Bigg|_{\frac{1}{n}}^{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2n+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{n}+1}{\sqrt{3}} \right)$$

b) Fie $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + x + 1}\,dx$. Deoarece $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$, avem:

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x^2 + x + 1}\,dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx - \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x^2 + x + 1}\,dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2}\,dx$$

Cu scimbarea de variabilă $t = \frac{1}{x}$ obținem $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-1}{x^2}\,dx = \int_{n}^{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 + t + 1}\,dt = -I_n$, deci

$I_n = \displaystyle\frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx - I_n$. Ținând cont de punctul a) rezultă că $I_n = \displaystyle\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2n+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{n}+1}{\sqrt{3}} \right)$.

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

Barem.

a) Calculul integralei	2p
b) Calculul lui I_n	4p
Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$	1p

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa.
Dacă $f(x)\ge \operatorname{arctg}|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$, demonstraţi că există $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x_0)=x_0$.

Anca Andrei, Suceava

Soluţie. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}|x|$. O primitivă a sa este $G(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right), & x\ge 0\\ -x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right), & x<0\end{cases}$.

Considerăm funcţia $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D(x)=F(x)-G(x)$ care este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi
$D'(x)=f(x)-g(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcţia D este crescătoare.

Pentru $x<0\Rightarrow D(x)\le D(0)\Rightarrow F(x)+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\le F(0)\Rightarrow$

$F(x)-x\le F(0)-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}(F(0)-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\frac{F(0)}{x}-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}-1\right)=-\infty$,

rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(F(x)-x\right)=-\infty$. (1)

Pentru $x>0\Rightarrow D(x)\ge D(0)\Rightarrow F(x)-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\ge F(0)\Rightarrow$

$F(x)-x\ge F(0)+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}(F(0)+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{F(0)}{x}+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}-1\right)=+\infty$

rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(F(x)-x\right)=+\infty$. (2)

Din (1), (2) şi din faptul că funcţia $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $H(x)=F(x)-x$, este continuă rezultă că $(\exists)x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $H(x_0)=0\Rightarrow F(x_0)=x_0$.

Barem.

Determină o primitivă a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg}|x|$	2 p
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(F(x)-x\right)=-\infty$	2 p
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(F(x)-x\right)=+\infty$	2 p
Finalizare	1 p

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.