

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 11.02.2023

Barem de evaluare și notare

clasa a V-a

Problema 1.		7 puncte
a) Ordonăți crescător numerele: $x=2^{3^4}$, $y=3^{4^2}$ și $z=4^{2^3}$.		
Soluție:		
$y = 3^{4^2} = 3^{16} = 3^{2 \cdot 8} = 9^8 < 9^9 < (2^9)^9 = 2^{81} = 2^{3^4} = x$		2p
$y = 3^{4^2} = 3^{16} > 2^{16} = 4^8 = 4^{2^3} = z$		1p
Finalizare: $z < y < x$		1p
b) Aflați restul împărțirii numărului $21^{2023} - 10$ la 63.		
Soluție:		
$21^{2023} - 10 = 21^{2022} \cdot 21 - 10 = 3^{2022} \cdot 7^{2022} \cdot 3 \cdot 7 - 10 = (3^2)^{1011} \cdot 7^{1011} \cdot 7^{1011} \cdot 3 \cdot 7 - 10 =$		1p
$9^{1011} \cdot 7^{1011} \cdot 3 \cdot 7^{1012} - 10 = 63^{1011} \cdot 3 \cdot 7^{1012} - 10 = 63 \cdot k - 10 = 63(k-1) + 63 - 10 = 63(k-1) + 53$		1p
Restul împărțirii lui $21^{2023} - 10$ la 63 este 53		1p
Problema 2.		7 puncte
Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $2^a + 10 \cdot b = \overline{ab}$, iar prin împărțirea lui $\overline{abc}$ la $\overline{cd}$ se obține câtul 7 și restul 30.		
Soluție:		
$10 \leq \overline{ab} \leq 99$, de unde $10 \leq 2^a \leq 99 \Rightarrow 4 \leq a \leq 6$		1p
$a = 4 \Rightarrow 16 + 10b = 40 + b \Rightarrow 9b = 24$ nu convine		
$a = 5 \Rightarrow 32 + 10b = 50 + b \Rightarrow 9b = 18 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \overline{ab} = 52$		2p
$a = 6 \Rightarrow 64 + 10b = 60 + b \Rightarrow 64 + 9b = 60$ nu convine		
$\overline{52c} = \overline{cd} \cdot 7 + 30 \Rightarrow 520 + c = (10c + d) \cdot 7 + 30$		1p
$490 + c = (10c + d) \cdot 7 \Rightarrow 69c + 7d = 490 \Rightarrow 69c \leq 490 \Rightarrow c \leq 7$		2p



Pentru $c = 7$ se obține $d = 1$, celelalte valori ale lui c nu convin; $\overline{abcd} = 5271$			1p
Problema 3.			7 puncte
Într-o urnă sunt 10 bile, numerotate de la 1 la 10. Se scoate câte o bilă din urnă și se așază pe masă, pe un singur rând, după următoarea regulă: - dacă pe masă se află un număr par de bile, noua bilă extrasă se așază la mijloc; - dacă pe masă se află un număr impar de bile, noua bilă extrasă se așază la capătul șirului în dreapta. După ce au fost scoase toate bilele din urnă, pe masă, de la stânga la dreapta, erau dispuse cele 10 bile cu numerele 5, 9, 2, 4, 10, 7, 6, 1, 8, 3. În ce ordine au fost scoase bilele?			
Soluție:			1p
Problema se rezolvă folosind metoda mersului invers. Constatăm că înaintea scoaterii celei de-a zecea bile, pe masă se aflau 9 bile – adică un număr impar de bile, deci a zecea bilă extrasă a fost pusă, conform regulii jocului, în dreapta șirului. Această bilă este numerotată cu numărul „3”.			
La scoaterea celei de-a noua bile, pe masă erau 8 bile – număr par de bile, deci a noua bilă a fost pusă în mijloc și ea este numerotată cu „10”. Procedând la fel, deducem ordinea scoaterii tuturor bilelor			1p
Număr extragere	Numărul bilei extrase	Configurația	4p
10	3	5 9 2 4 10 7 6 1 8 3	
9	10	5 9 2 4 10 7 6 1 8	
8	8	5 9 2 4 7 6 18	
7	4	5 9 2 4 7 6 1	
6	1	5 9 2 7 6 1	
5	2	5 9 2 7 6	
4	6	5 9 7 6	
3	9	5 9 7	
2	7	5 7	



	1	5	5	
	Ordinea extragerii bilelor a fost: 5, 7, 9, 6, 2, 1, 4, 8, 10, 3.			1p
Problema 4.				7 puncte
Considerăm următorul joc: avem un triunghi și numerele naturale 1, 2, 3. Pasul 1: în fiecare vârf al triunghiului se scrie unul din numerele date. Pasul 2: fiecare număr aflat în unul din vârfurile triunghiului se înlocuiește cu suma celorlalte două. Pasul 3: se repetă acțiunea de la pasul 2. a) Continuând în același fel, determinați numerele aflate în vârfurile triunghiului la pasul 4. b) Continuând în același fel, determinați suma numerele aflate în vârfurile triunghiului la pasul 2022.				
	Soluție: a) Pasul I: 1, 2, 3 Pasul II: 3, 4, 5 Pasul III: 7, 8, 9 Pasul IV: 15, 16, 17			3p
	b) La fiecare pas suma va fi dublul celei anterioare deoarece fiecare număr se înlocuiește cu suma celorlalte două. Dacă la pasul k numerele sunt a, a+1, a+2 (cu suma 3a+3) atunci la pasul k+1 numerele sunt 2a+1, 2a+2, 2a+3 (cu suma 6a+6). $S_1 = 6, S_2 = 12, S_3 = 24, \dots, S_n = 2 \cdot S_{n-1}$ De aici, $S_n = 2^{n-1} \cdot S_1$ Astfel, $S_{2022} = 2^{2021} \cdot 6 = 2^{2022} \cdot 3$			1p 1p 1p 1p

Notă:

Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct.