

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aVIII-a

Problema 1.

a) Să se arate că $\sqrt{20172018^2 + 40344037} \in \mathbb{N}$.

b) Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2 - b^2 = 3ab$. Să se arate că

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{6b}{a} - \frac{6a}{b} + 23} \text{ este număr natural pătrat perfect}$$

c) Să se arate că $\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1}$ este număr natural impar oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluție și barem de corectare:

a) $20172018 = a \Rightarrow 2a + 1 = 40344037 \Rightarrow \sqrt{20172018^2 + 40344037} = a + 1$...2 puncte

b) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{6b}{a} - \frac{6a}{b} + 23} = \sqrt{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2 - 6\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) + 23} =$
 $= \sqrt{11 - 18 + 23} = 4 = 2^2$ 2 puncte

c) Notăm $y = n^2 + 9n + 18 = (n+3)(n+6) \Rightarrow (n+4)(n+5) = y + 2$
 $\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1} = n^2 + 9n + 19$ pentru $n \in \mathbb{N}$ 1punct
 $n^2 + 9n + 19$ este număr impar pentru n număr par..... 1punct
 $n^2 + 9n + 19$ este număr impar pentru n număr impar 1punct

Problema 2.

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ în care $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{BC'} = \frac{CC'}{CD'}$.

Dacă distanța dintre dreptele AB' și CD' este egală cu 8cm, atunci să se calculeze aria triunghiului ACD' .

Soluție și barem de corectare:

Fie $AB = x, BC = y$ și $CC' = z$.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{BC'} = \frac{CC'}{CD'} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + x^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{y^2 + z^2} = \frac{z^2}{z^2 + x^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{1}{2} \quad (1).$$

Din (1) rezultă că $x = y = z$ și atunci paralelipipedul

dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ este cub.....3 puncte

$B' A D' C$ este tetraedru regulat și $d(AB', CD') = MN$, unde

$MN \perp AB'$ și $MN \perp CD'$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor AB' și,

respectiv CD' 3 puncte

Dacă $AB' = a$, atunci $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $AM = \frac{a}{2}$. Din teorema lui Pitagora în triunghiul

AMN obținem $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 8\text{cm} \Rightarrow a = AB' = 8\sqrt{2}\text{cm} = AC \Rightarrow$

aria triunghiului ACD' este $32\sqrt{3}\text{cm}^2$1 punct

Problema 3.

Fie numerele reale $x, y, z \geq 1$ astfel încât $x + y + z = 6$. Arătați că

$$\frac{x^2 + 3}{3x^2 + 1} + \frac{y^2 + 3}{3y^2 + 1} + \frac{z^2 + 3}{3z^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

$$\frac{a^2 + 3}{3a^2 + 1} \geq \frac{1}{a}, \text{ oricare ar fi } a \in [1, \infty) \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a(3a^2 + 1)} \geq 0, \text{ oricare ar fi } a \in [1, \infty) \quad (1) \dots\dots\dots 4 \text{ puncte}$$

$$\text{Folosind (1) avem: } \frac{x^2 + 3}{3x^2 + 1} + \frac{y^2 + 3}{3y^2 + 1} + \frac{z^2 + 3}{3z^2 + 1} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

Problema 4.

Triunghiul ABC are $AB = AC = 6$ cm , $BC = 6\sqrt{3}$ cm și O este centrul cercului circumscris acestui triunghi. Pe planul triunghiului ABC se construiesc perpendicularele AM și ON astfel încât $ON = AM = 8$ cm. Să se demonstreze că $\frac{d(M, BC) + d(N, BC)}{MN} \geq 1$.

Soluție și barem de corectare:

Se arată că triunghiul ABC este obtuzunghic $\Rightarrow O$ este în exteriorul triunghiului.....1punct

Cazul I ON și AM sunt de aceeași parte a planului ABC . Din $T_3 \perp$ avem $ME \perp BC$ și $NE \perp BC$, unde E este mijlocul laturii BC .

$$\Rightarrow d(M, BC) + d(N, BC) = ME + NE > MN \Rightarrow \frac{d(M, BC) + d(N, BC)}{MN} > 1 \text{ (în triunghiul MNE , suma lungimilor a două din laturi este mai mare decât a treia latură)..... 2 puncte}$$

Cazul II: ON și AM nu sunt de aceeași parte a planului ABC . Din $T_3 \perp$ avem $ME \perp BC$ și $NE \perp BC$, unde E este mijlocul laturii BC . $OA = R = 6$ cm pentru că $\triangle OAB$ echilateral $\Rightarrow OE = EA = 3$ cm, $MA \parallel ON \Rightarrow M, E, N$

$$\text{coliniare} \Rightarrow d(M, BC) + d(N, BC) = ME + NE = MN \Rightarrow \frac{d(M, BC) + d(N, BC)}{MN} = 1.$$

$$\text{Din cele două cazuri} \Rightarrow \frac{d(M, BC) + d(N, BC)}{MN} \geq 1$$

..... 4 puncte

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aVI-a

Problema 1.

Determinați numerele naturale nenule a, b, x, y astfel încât $(a, b) = 2^{x+y}$ și $a + b = 12$. Am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

*Gazeta matematică***Soluție și barem de corectare:**

$(a, b) = 2^{x+y} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } (m, n) = 1 \text{ a. î. } a = m \cdot 2^{x+y} \text{ și } b = n \cdot 2^{x+y}$	2p
$a + b = 12 \Rightarrow m \cdot 2^{x+y} + n \cdot 2^{x+y} = 12, (m, n) = 1$	1p
$2^{x+y}(m+n) = 2^2 \cdot 3$ Cum $x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x+y \geq 2 \quad \Rightarrow x+y = 2 \text{ și } m+n = 3, (m, n) = 1$	2p
Cazul I: $x = y = 1$ $m = 1 \Rightarrow a = 4$ $n = 2 \Rightarrow b = 8$	1p
Cazul II: $x = y = 1$ $m = 2 \Rightarrow a = 8$ $n = 1 \Rightarrow b = 4$	1p

Problema 2.

Arătați că fracția $\frac{2018^{2018} - 2018^{2017} - 2018^{2016}}{2017^{2018} - 2017^{2017} - 2017^{2016} - 1}$ este reductibilă.

Soluție și barem de corectare:

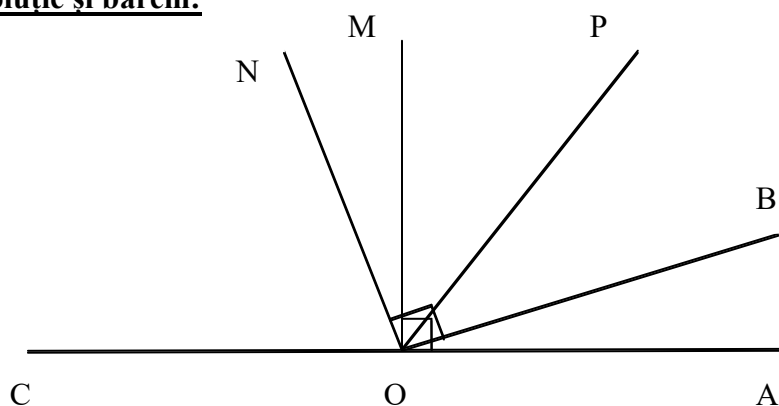
$U(2018^{2018}) = U(8^{2018}) = U(8^{4k+2}) = 4$	0,5p
$U(2018^{2017}) = U(8^{2017}) = U(8^{4k+1}) = 8$	0,5p
$U(2018^{2016}) = U(8^{2016}) = U(8^{4k}) = 6$	0,5p
$U(2018^{2018} - 2018^{2017} - 2018^{2016}) = 0$	1,5p
$U(2017^{2018}) = U(7^{2018}) = U(7^{4k+2}) = 9$	0,5p
$U(2017^{2017}) = U(7^{2017}) = U(7^{4k+1}) = 7$	0,5p
$U(2017^{2016}) = U(7^{2016}) = U(7^{4k}) = 1$	0,5p
$U(2017^{2018} - 2017^{2017} - 2017^{2016} - 1) = 0$	1,5p
Precizarea că fracția se simplifică prin 2, 5 sau 10, deci este reductibilă.	1p

Problema 3.

Fie unghiul ascuțit $\angle AOB$ și semidreapta $[OC$ opusă semidreptei $[OA$. Știind că în semiplanul determinat de dreapta OA și în care se află semidreapta $[OB$, se duc $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$ și că măsura $\angle AOB$ este o treime din măsura $\angle NOC$, iar $[OP$ este bisectoarea $\angle AON$, se cere:

- Aflați măsura unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle COP$;
- Demonstrați că $[OP$ este bisectoarea $\angle BOM$.

Soluție și barem:



a) Notăm $m(\angle AOB) = x \Rightarrow m(\angle CON) = 3x$	
$[OA$ și $[OC$ semidrepte opuse $\Rightarrow m(\angle AOC) = 180^\circ \Rightarrow$	1p
$x + 90^\circ + 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 22^\circ 30' \Rightarrow m(\angle AOB) = 22^\circ 30'$	1p
$m(\angle AON) = x + 90^\circ = 112^\circ 30'$	0,5p
$[OP$ bisectoarea $\angle AON \Rightarrow m(\angle AOP) = m(\angle PON) = \frac{m(\angle AON)}{2} = 56^\circ 15'$	1p
$m(\angle CON) = 3x = 67^\circ 30'$	0,5p
$m(\angle COP) = m(\angle CON) + m(\angle NOP) = 123^\circ 45'$	0,5p
b) $m(\angle BOP) = m(\angle AOP) - m(\angle AOB) = 33^\circ 45'$	1p
$m(\angle MOP) = m(\angle AOM) - m(\angle AOP) = 33^\circ 45'$	1p
Obținem $m(\angle BOP) = m(\angle MOP) = 33^\circ 45' \Rightarrow [OP$ bisectoarea $\angle BOM$.	0,5p

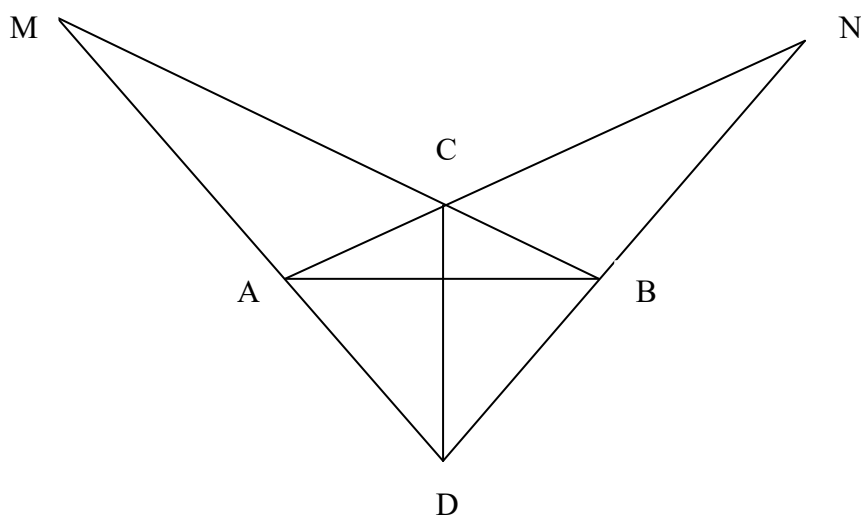
Problema 4.

Fie C și D două puncte situate de o parte și de alta a segmentului $[AB]$ astfel încât $[AC] \equiv [BC]$ și $[AD] \equiv [BD]$. Dacă $DA \cap BC = \{M\}$ și $DB \cap AC = \{N\}$ demonstrați că:

a) $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBC$;

b) $[AM] \equiv [BN]$.

Soluție și barem de corectare:



a) $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (LLL)	$[CD] \equiv [CD]$ (latură comună) $[AC] \equiv [BC]$ (ip.) $[AD] \equiv [BD]$ (ip.) $\Rightarrow \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CBD$	2p
$m(\sphericalangle MAC) = 180^\circ - m(\sphericalangle CAD)$ $m(\sphericalangle NBC) = 180^\circ - m(\sphericalangle CBD)$ $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CBD$	$\Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBC$	2p
b) $\triangle MAC \equiv \triangle NBC$: (ULU)	$\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBC$ (a) $[AC] \equiv [BC]$ (ip.) $\sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle NCB$ ($\sphericalangle$ opuse la vârf) $\Rightarrow [AM] \equiv [BN]$	3p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a VII-a

Problema 1.

Fie numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$. Să se demonstreze că $E \in \mathbb{N}$ unde

$$E = \frac{2018+a}{1+a+ab+abc} + \frac{2018+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{2018+c}{1+c+cd+cda} + \frac{2018+d}{1+d+da+adb}$$

Soluție și barem de corectare:

Se amplifică rapoartele: primul cu bcd , al treilea cu b , al patrulea cu bc și se obține (2p)

$$\begin{aligned} E &= \frac{2018bcd+1}{bcd+1+b+bc} + \frac{2018+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{2018b+bc}{b+bc+bcd+1} + \frac{2018bc+cdb}{bc+bcd+1+b} (2p) = \frac{2018 \cdot (bcd+1+b+bc) + 1+b+bc+bcd}{bcd+1+b+bc} (2p) \\ &= \frac{2019 \cdot (1+b+bc+bcd)}{1+b+bc+bcd} = 2019 \in \mathbb{N} (1p) \end{aligned}$$

Problema 2.

a) Să se determine numărul natural $\overline{ab}$, scris în sistemul de numerație zecimal, dacă

$$\sqrt{aabb} = \overline{aab} - b - a.$$

b) Fie $E_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Să se determine $n \leq 15$ pentru care $E_n \in \mathbb{Q}$.

Soluție și barem de corectare:

$$a) \sqrt{aabb} = 109 \cdot a \Rightarrow \overline{aabb} = 11881 \cdot a^2 (2p)$$

$$\text{Pentru } a \geq 3 \Rightarrow 11881 \cdot a^2 > \overline{aabb} \quad (0,5p)$$

$a \neq 0$, cifră,

Prin verificare se obține soluția $a=1$ și $b=8$, $\overline{ab} = 18$. (0,5p)

b)

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2} \cdot 1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot (n+1)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} \right) + \dots \\ &\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} \cdot (n+1)} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot (n+1)} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} (3p) \end{aligned}$$

$$E_n \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n+1 \text{ pp}, n \leq 15 \Rightarrow n \in \{3, 8, 15\} (1p)$$

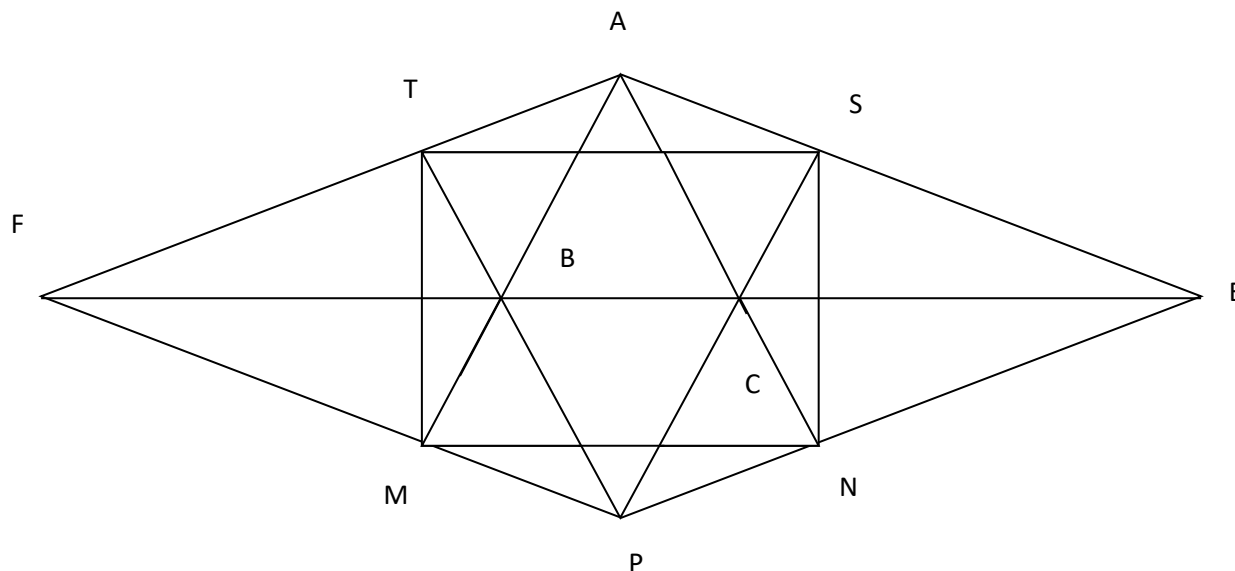
Problema 3.

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel cu baza BC . Perpendicularele în A pe AB , respectiv AC intersectează dreapta BC în E respectiv în F . Dacă $EN \perp AC, N \in AC$, $FM \perp AB, M \in AB$ și $EN \cap FM = \{P\}$, demonstrați că:

- $AEPF$ și $ABPC$ sunt romburi.
- $MNST$ este dreptunghi, unde $\{T\} = PB \cap AF$ și $\{S\} = PC \cap AE$.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:



$$a) \triangle ABC \text{ isoscel cu baza } BC \Rightarrow m(\angle B) = m(\angle C) = u^\circ, m(\angle A) = 180^\circ - 2u$$

$$m(\angle FAB) = m(\angle EAC) = 2u^\circ - 90^\circ, m(\angle ABF) = m(\angle ACE) = 180^\circ - u^\circ$$

$$\triangle ABF \equiv \triangle ACE (U.L.U.) \Rightarrow AF = AE (1)$$

$$AF \perp AC, PE \perp AC \Rightarrow AF \parallel PE(2)$$

$$AE \perp AB, PF \perp AB \Rightarrow AE \parallel PF(3)$$

Din (1), (2), (3) AEPF romb..... 2p

$$AM \perp PF, PS \perp AE \Rightarrow AM \parallel PS \Rightarrow AB \parallel PC$$

$$AN \perp PE, PT \perp AF \Rightarrow AN \parallel PT \Rightarrow AC \parallel PB$$

ABCP paralelogram, $AB=AC \Rightarrow ABPC$ romb.....1p

$$\Delta FAP, \text{Bortocentru} \Rightarrow PT \perp AF(1p)$$

b) $\Delta FAM \equiv \Delta FPT(I.U.) \Rightarrow FM = FT \Rightarrow \Delta TFM$ isoscel $\Rightarrow FB \perp TM(0,5p)$ (4).

Analog $SN \perp CE$ (5). Din (4) și (5), $TM \parallel SN$(0,5p)

$\Delta APT \equiv \Delta APS(I.U.) \Rightarrow AT = AS \Rightarrow \Delta TAS$ isoscel $\Rightarrow AP \perp TS$ (6). Analog $PA \perp MN$ (7) ...(1p). Din (6), (7) $\Rightarrow TS \parallel MN$ și cum $TM \parallel SN \Rightarrow TSNM$ paralelogram $m(\angle MT, TS) = m(\angle AP, FE) = 90^\circ$ (unghiuri cu laturi respectiv paralele) $\Rightarrow MNST$ dreptunghi.....(1p)

Problema 4.

Printr-un punct variabil D situat pe latura BC a triunghiului oarecare ABC, se duce paralela la mediana AM, $M \in (BC)$, care intersectează dreptele AB și AC, în E și respectiv F. Arătați că:

- a) $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$;
b) DE + DF este constantă.

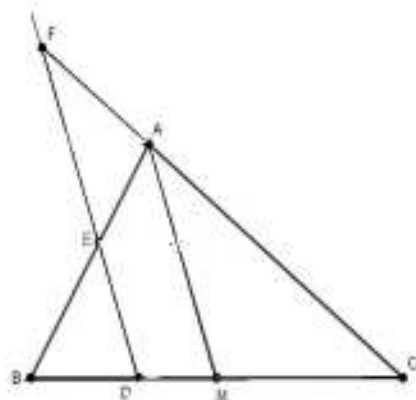
Soluție și barem de corectare:

a)

M mijlocul [BC] $\Rightarrow BM = MC$, $AM \parallel DF$

$$\stackrel{Th.Thales}{\Rightarrow} \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{MC} (1,5p), \quad DE \parallel AM \stackrel{Th.Thales}{\Rightarrow} \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{MB} (1,5p)$$

Finalizare $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \quad (0,5p)$



b) $\triangle ABC, DE \parallel AM \xrightarrow{Tfa} \frac{BD}{BM} = \frac{DE}{AM} (1,25p)$

$$\triangle CFD, AM \parallel FD \xrightarrow{Tfa} \frac{CD}{CM} = \frac{DF}{AM} (1,25p)$$

Adunând relațiile membru cu membru obținem:

$$\frac{DE + DF}{AM} = \frac{BC}{BM} = 2$$

Deci $DE + DF = 2AM = ct. \quad (1p)$

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aV-a

Problema 1. Se dau numerele:

$$a = \left[2 + 2^2 \cdot 2^{24} + 2^{95} : 2^{14} + 2 \cdot (3^2)^{25} \right] : (1 + 2^{25} + 2^{80} + 3^{50}) \cdot 1^{300} - 2 + 3^{16}$$

$$b = 2^{70} - \left\{ 2^3 \cdot 1111_{(2)} - 5 \cdot \left[5 - (10^4 - 9375) : 5^3 \right] : 9^{1994} - 26 \cdot 2^2 \right\} \cdot 2^{65}$$

- a) Arătați că **a** este pătrat perfect și **b** nu este pătrat perfect;
b) Comparați numerele date.

Barem:

a) Calculează $a = 3^{16}$ **2p**

Obține $b = 2^{69}$ **2p**

Scrie pe $a = (3^8)^2 \Rightarrow$ a este pătrat perfect.....**0,5p**

Ultima cifră a lui b este 2, de unde rezultă că numărul nu este pătrat perfect.**0,5p**

b) Avem $3^{16} < 16^{16} = 2^{64}$ **1p**

Dar $2^{64} < 2^{69}$ **0,5p**

Obținem prin tranzitivitate că $a < b$ **0,5p**

Problema 2.

Într-o școală, numărul elevilor de clasa a V-a, este cuprins între cel mai mic număr natural de trei cifre distincte și cel mai mic număr natural de trei cifre identice. Un sfert dintre aceștia participă la corul școlii și a noua parte dintre elevi frecventează cercul de matematică.

Câți elevi de clasa a V-a sunt în școală?

Barem:

Fie n numărul de elevi. Atunci $102 < n < 111$.	2p
sau $n : 4, n : 9, (4, 9) = 1 \Rightarrow n : 36$ numărul de elevi este număr natural, deci n se împarte exact la 4 și la 9	4p
$n = 108$	1p

Problema 3.

Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că prin împărțire la $\overline{bc}$, obținem câtul nenul c și restul 0.

Gazeta matematică

Barem:

$$100a + \overline{bc} = c \cdot \overline{bc} \Rightarrow 100a = \overline{bc} \cdot (c - 1) \text{ cu cifrele } a \text{ și } c \text{ nenule } \dots(2p)$$

Cum $u(100a) = 0 \Rightarrow$ că și membrul drept are ultima cifră 0 și cum c cifră nenulă aceasta ia valorile 5 și 6.....(2p)

$$\text{Dacă } c = 5 \Rightarrow 100a = 4 \cdot \overline{b5} \Rightarrow \overline{b5} = 25 \cdot a \Rightarrow (a; b) \in \{(1; 2), (3; 7)\} \dots(1,5p)$$

$$\text{Dacă } c = 6 \Rightarrow 100a = 5 \cdot \overline{b6} \Rightarrow \overline{b6} = 20a \Rightarrow \text{nu avem soluție. } \dots(1p)$$

Obținem numerele: 125 și 375. (0,5p)

Problema 4.

a) Scrieți numărul 289 ca sumă de 3 pătrate perfecte.

b) Arătați că $8^{2018} + 9^{2018} + 12^{2018} < 289^{2018}$.

Barem:

a) $289 = 8^2 + 9^2 + 12^2$	2p
b) $8^{2016} < 289^{2016} \mid \cdot 8^2 \Rightarrow 8^{2018} < 289^{2016} \cdot 8^2$ $9^{2016} < 289^{2016} \mid \cdot 9^2 \Rightarrow 9^{2018} < 289^{2016} \cdot 9^2$ $12^{2016} < 289^{2016} \mid \cdot 12^2 \Rightarrow 12^{2018} < 289^{2016} \cdot 12^2$	3p
Adunând relațiile membru cu membru se obține : $8^{2018} + 9^{2018} + 12^{2018} < 289^{2016} (8^2 + 9^2 + 12^2)$ $8^{2018} + 9^{2018} + 12^{2018} < 289^{2018}$	2p