

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 23 februarie 2014

Clasa a V-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Să se compare numerele :

$$a = [(3+4)^2 - (3^2 + 4^2)] : [4^{n+1} : 2^{2n} + 2^2 \cdot 5 \cdot (3^2 - 2^3)],$$
$$b = (25^n : 5^{2n} + 1)^n \text{ și } c = [(2^n + 2^n) : 2]^2, \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

SUBIECTUL II (7 puncte)

Alegem 61 numere naturale nenule, distincte, a căror sumă este 2044. Arătați că printre aceste numere se găsește cel puțin unul care să fie cub perfect.

SUBIECTUL III (7 puncte)

Știind că numărul $\overline{abc}$ este numărul scris din ultimele trei cifre ale numărului $n = 2^{2014} - 2^{2012} + 2^{2009}$, sa se afle cardinalul mulțimii $A = \{n \in \mathbb{N} / \overline{abc} < n \leq 2014\}$

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Mulțimea $A = \{a, b, c, d, e\}$ are următoarele proprietăți:

- a) media aritmetică a elementelor mulțimii A este 2013;
- b) eliminând cel mai mic element al mulțimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2014;
- c) eliminând cel mai mare element al mulțimii A, media aritmetică a elementelor rămase este 2012;

Determinați numărul de mulțimi A care au aceste proprietăți.

Notă. Timp de lucru efectiv **2 ore**.

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică - **14 puncte**.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 23 februarie 2014

Clasa a VI-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Unui elev care rezolvă probleme i se cere să găsească toate numerele de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 6. Care este cea mai mare sumă pe care o poate câștiga dacă pentru un număr în care $a \neq b$ primește 50 de bani iar pentru un număr în care $a = b$ primește 1 leu ?

SUBIECTUL II (7 puncte)

a) Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 3^{n+1} \cdot 7^n + 4$ și $b = 3^n \cdot 7^{n+1} + 6$, unde n este un număr natural.

b) Determinați numărul natural n , pentru care cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este egal cu 91.

SUBIECTUL III (7 puncte)

Se consideră punctele coliniare $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ în această ordine, astfel încât:

$$M_1M_2 = 3cm, M_2M_3 = 6cm, M_3M_4 = 9cm, \dots$$

a) Arătați că M_3 este mijlocul segmentului $[M_1M_4]$.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $M_5M_n = 9450 \text{ cm}$

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Fie dreapta AB și $O \in (AB)$. De aceeași parte a dreptei AB se consideră, în același sens, unghiurile $\sphericalangle AOA_1, \sphericalangle A_1OA_2, \dots, \sphericalangle A_{n-1}OA_n$, astfel încât $m(\sphericalangle AOA_1) = 1^\circ, m(\sphericalangle A_1OA_2) = 2^\circ, \dots, m(\sphericalangle A_{n-1}OA_n) = n^\circ$.

a) Determinați valoarea maximă a numărului n .

b) Pentru $n = 18$, determinați numărul de unghiuri drepte $\sphericalangle A_iOA_j$, unde $i, j \in \{1, 2, \dots, 18\}$

Notă. Timp de lucru efectiv **2 ore**.

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică - **14 puncte**.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 23 februarie 2014

Clasa a VII-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Fie numărul $n = \frac{1 + a\sqrt{3}}{1 + b\sqrt{3}}$ unde a și b sunt numere raționale.

a) Dacă $a = 1$ și $b = \frac{1}{3}$ arătați că $n = \sqrt{3}$.

b) Dacă și n este rațional atunci arătați că $n = 1$.

SUBIECTUL II (7 puncte)

a) Scrieți numărul 100 ca sumă de patru cuburi perfecte.

b) Arătați că numărul $a_n = 10^{n^3 - n + 2}$ se scrie ca sumă de patru cuburi perfecte.

SUBIECTUL III (7 puncte)

Fie triunghiul ABC, ascuțitunghic cu BD și CE înălțimile din B respectiv C ($D \in [AC]$; $E \in [AB]$), iar

M și N respectiv mijloacele segmentelor BC și DE.

a) Dacă punctele A, N, M sunt coliniare demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

b) Dacă $m(\angle A) = 60^\circ$ demonstrați că $\triangle EMD$ este echilateral.

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Fie $\triangle ABC$ iar punctele M, N, P, Q respectiv mijloacele segmentelor [BC], [AM], [BN], [PM].

a) Demonstrați că dreptele AM, BQ și CP sunt concurente.

b) Aflați valoarea raportului $\frac{AD}{DC}$ unde D este intersecția dreptei BQ cu [AC].

Notă. Timp de lucru efectiv **3 ore**.

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică - **14 puncte**.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 23 februarie 2014

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

- a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$, încât $x^2 + 4y(y + 1) = 4(x - 1)$. Demonstrați că $|x + 2y - 1| \leq 2$.
- b) Aflați valoarea maximă a fracției $\frac{-2a^2 + 6a - 8}{a^2 - 2a + 4} \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (7 puncte)

Fie $E(x) = \left[\frac{81}{(x-3)(x+3)(x^2+9)+81} - \frac{1}{16-(4+x)(4-x)} \right] : 2 \cdot \left(\frac{x+9}{x^4} \right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-9, 0\}$.

- a) Arătați că $E(x) = \frac{9-x}{2}$
- b) Calculați $E(1) \cdot E(2) \cdot E(3) \cdot \dots \cdot E(2014)$
- c) Aflați suma primelor 30 de zecimale ale numărului $\left(E\left(\frac{19}{2}\right) \right)^{50}$.

SUBIECTUL III (7 puncte)

Punctele A, B, C și D sunt necoplanare iar M este mijlocul segmentului [BC], T este mijlocul segmentului [AC], $N \in [AC]$ încât $AN = 2NC$, $P \in [AB]$ încât $AP = 3PB$, $E \in [AC]$ astfel încât $CE = \frac{AC}{6}$ și R este simetricul punctului M față de punctul N. Demonstrați că punctele D, P, T și R sunt coplanare.

SUBIECTUL IV (7 puncte)

$ABCD A'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic iar $AC \cap BD = \{O\}$. Ducem $AM \perp A'B$, $M \in A'B$, $CN \perp C'B$, $N \in C'B$ și $DP \perp D'B$, $P \in D'B$.

- a) Arătați că $PC \perp (AMP)$.
- b) Dacă, în plus, $MN \parallel (ABC)$, demonstrați că ABCD este pătrat.

Notă. Timp de lucru efectiv **3 ore**.

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică este de **14 puncte**.

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Clasa a V-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

$a=1$	1p
$b=2^n$	2p
$c=2^{2n}$	2p
Daca $n=0$ numerele sunt egale	1p
Daca $n>0$ avem $a<b<c$	1p

SUBIECTUL II (7 puncte)

Daca vom lua cele mai mici 61 numere care nu conțin și cuburi perfecte avem suma

$1+2+3+ \dots +65-(1+8+27+64)$	2p
$1+2+3+ \dots +65=2145$	2p
$1+8+27+64=100$	1p
$1+2+3+ \dots +65-(1+8+27+64)=2045$	1p
Obținem o contradicție, deci in suma se afla cel puțin un cub perfect....	1p

SUBIECTUL III (7 puncte)

$n = 2^{2009} \cdot 25 = 2^{2007} \cdot 100$	2p
ultima cifră a lui 2^{2007} este 8	2p
$abc = 800$	1p
Card $A=2014-800=1214$	2p

SUBIECTUL IV (7 puncte)

.Vom presupune elementele mulțimii ordonate crescător ,

$a+b+c+d+e=10065$, $b+c+d+e=8056$, deci $a=2009$	1p
$a+b+c+d=8048$, deci $e=2017$	1p
$b+c+d=6039$ si $2009<b<c<d<2017$	1p
Daca $b=2010$ avem posibilitățile $c=2013$ si $d=2016$ sau $c=2014$ si $d=2015$	1p
Daca $b=2011$ avem posibilitățile $c=2012$ si $d=2016$ sau $c=2013$ si $d=2015$	1p
Daca $b=2012$ vom avea $c=2013$ si $d=2014$	1p
Deci sunt 5 mulțimi cu aceste proprietăți.....	1p

Notă: Orice soluție corectă diferită de cea a autorului se punctează corespunzător.

Comisia de evaluare poate modifica în mod unitar distribuția punctelor.

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Clasa a VI-a

SUBIECTUL I (7 puncte)Cea mai mare sumă se câștigă pentru aflarea tuturor numerelor de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 6 1p $\overline{2a3b}$ se divide cu 6 dacă se divide simultan cu 2 și cu 3 1pDacă $\overline{2a3b}$ se divide cu 2 rezultă $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ 1pDacă $b=0$ rezultă $a \in \{1, 4, 7\}$ Dacă $b=2$ rezultă $a \in \{2, 5, 8\}$ Dacă $b=4$ rezultă $a \in \{0, 3, 6, 9\}$ Dacă $b=6$ rezultă $a \in \{1, 4, 7\}$ Dacă $b=8$ rezultă $a \in \{2, 5, 8\}$

2p

În total sunt 16 numere de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 6; 14 în care $a \neq b$ și două în care $a = b$ (2232 și 2838)

..... 1p

Suma cea mai mare pe care o poate încasa rezolvatorul este de 9 lei ($14 \cdot 0,50 + 2 \cdot 1 = 7 + 2 = 9$)

..... 1p

SUBIECTUL II (7 puncte)a) $a = 21^n \cdot 3 + 4, b = 21^n \cdot 7 + 6$ 1pFie d cel mai mare divizor comun al numerelor a și b . Rezultă $d \mid a$ și $d \mid b$ rezultă $d \mid 7a - 3b$ 2pCum $7a - 3b = 21^{n+1} + 28 - 21^{n+1} - 18 \Rightarrow d \mid 10$ 0,5pRezultă $d \in \{1, 2, 5, 10\}$ 0,5pNumerele a și b sunt impare, rezultă $d \in \{1, 5\}$. Cum $u(b) = 6$ și $u(a) = 4$, deducem că $d = 1$ 1pb) Observăm că $91 = 7 \cdot 13$ 0,5p $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \Rightarrow 91 \cdot 1 = (21^n \cdot 3 + 4)(21^n \cdot 7 + 6)$ 0,5pCum $a > 1, b > 1$ și $a < b \Rightarrow a = 7$ și $b = 13$ 0,5pDeducem că $n = 0$ 0,5p**SUBIECTUL III** (7 puncte)a) $M_1 M_3 = M_3 M_4 = 9 \text{ cm}$ 2p

Finalizare 1p

b) $M_5 M_n = M_5 M_6 + M_6 M_7 + \dots + M_{n-1} M_n = 3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n - 20}{2}$ 2p $(n-1) \cdot n = 6320$ 1pFinalizare: $n = 80$ 1p

SUBIECTUL IV (7 puncte)

a) Avem $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 1p

$\frac{n(n+1)}{2} \leq 180^0$ și n este maxim $\Rightarrow n = 18$ 2p

b) $(i + 1) + (i + 2) + \dots + (i + k - 1) = 90^0$, $k = j + 1 - i$ 0,5p

$i(k - 1) + \frac{(k-1) \cdot k}{2} = 90^0 \Rightarrow (k - 1)(2i + k) = 180^0$ 0,5p

Cum $k - 1 \in D_{180}$ și $k - 1 < 18 \Rightarrow k - 1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15\} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 16\}$ 1p

Avem $k = 10$, $i = 5$ și $k = 13$, $i = 1$ 1p

Finalizare: $m(\sphericalangle A_5 O A_{14}) = m(\sphericalangle A_1 O A_{13}) = 90^0$ 1p

Notă: Orice soluție corectă diferită de cea a autorului se punctează corespunzător.

Comisia de evaluare poate modifica în mod unitar distribuția punctelor.

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Clasa a VII-a

SUBIECTUL I (7 puncte)

$$a) n = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+3)}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

1p-înlocuire și aducere la forma de a da factor comun;

1p-factor comun sau raționalizare;

1p-finalizare

$$b) n = \frac{1+a\sqrt{3}}{1+b\sqrt{3}} \Leftrightarrow n(1+b\sqrt{3}) = 1+a\sqrt{3} \Leftrightarrow n+nb\sqrt{3} = 1+a\sqrt{3} \Leftrightarrow n-1 = \sqrt{3}(nb-a).$$

$$\text{Cum } n-1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{3}(nb-a) \in \mathbb{Q} \Rightarrow nb-a=0 \Rightarrow n-1=0 \Rightarrow n=1$$

2p-aducerea la forma $n-1 = \sqrt{3}(nb-a)$;

2p-finalizare)

SUBIECTUL II (7 puncte)

$$a) 100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \dots \dots \dots 2p$$

$$b) a_n = 10^{n^3-n+2} = 10^{n^3-n} \cdot 10^2 (1p) = 10^{n(n-1)(n+1)} \cdot 10^2 (1p) = 10^{3k} \cdot 100 (2p) = (10^k)^3 \cdot 100 = (10^k)^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = (10^k \cdot 1)^3 + (10^k \cdot 2)^3 + (10^k \cdot 3)^3 + (10^k \cdot 4)^3 (1p)$$

SUBIECTUL III (7 puncte)a) $[ME] \equiv [MD]$ (mediane în triunghiuri dreptunghice cu aceeașiipotenuza) $\Rightarrow \triangle EMD$ -isoscel (1p). Dar MN este mediana $\Rightarrow$ MN mediatoarea lui [ED] $\Rightarrow [AE] \equiv [AD]$. $\triangle AEM \equiv \triangle ADM$ (LLL) (1p) $\Rightarrow$ AM bisectoare a unghiului Ași cum era și mediana pentru [BC] $\Rightarrow \triangle ABC$ isoscel. (1p)

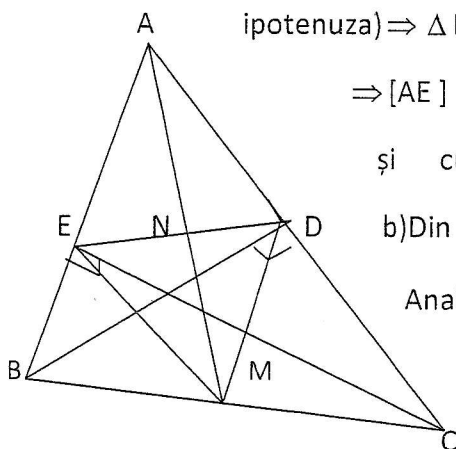
$$b) \text{Din } [EM] \equiv [MB] \Rightarrow \triangle EMB \text{ isoscel} \Rightarrow m(\angle EMB) = 180^\circ - 2 \cdot m(\angle B)$$

$$\text{Analog } m(\angle DMC) = 180^\circ - 2 \cdot m(\angle C) (2p)$$

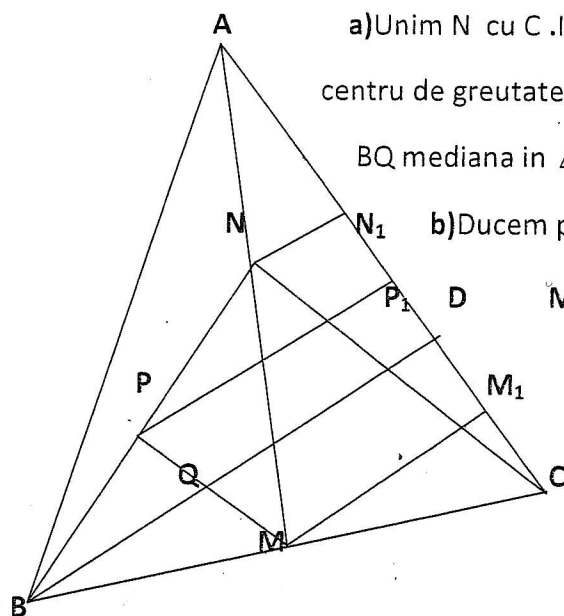
$$\Rightarrow m(\angle EMD) = 180^\circ - [180^\circ - 2 \cdot m(\angle B) + 180^\circ - 2 \cdot m(\angle C)] =$$

$$= 180^\circ - [360^\circ - 2(m(\angle B) + m(\angle C))] = 180^\circ - [360^\circ - 2(180^\circ - m(\angle A))] =$$

$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ (2p).$$



SUBIECTUL III (7 puncte)



a) Unim N cu C . În $\triangle NBC$, NM și CP sunt mediane $\Rightarrow$ intersecția lor este centru de greutate. **(1p)** Din BQ mediană în $\triangle PBM$ și $PM \parallel NC$ (PM linie mijlocie) $\Rightarrow$ BQ mediană în $\triangle BNC \Rightarrow BD, CP, AM$ concurente **(2p)**

b) Ducem prin M, P, N paralele la BD care intersectează AC respectiv în M_1, P_1, N_1 . **(1p)** $\Rightarrow CM_1 \equiv M_1D \equiv P_1D \equiv P_1N_1$ **(2p)** și $AN_1 \equiv N_1D \Rightarrow$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{5}{2} \text{ (2p)}$$

Notă: Orice soluție corectă diferită de cea a autorului se punctează corespunzător.

Comisia de evaluare poate modifica în mod unitar distribuția punctelor.

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Clasa a VIII a

SUBIECTUL 1 (7 puncte)

- a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$, încât $x^2 + 4y(y + 1) = 4(x - 1)$. Demonstrați că $|x + 2y - 1| \leq 2$.
- b) Aflați valoarea maximă a fracției $\frac{-2a^2+6a-8}{a^2-2a+4}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluție:

- a) Aducerea relației la forma $(x - 2)^2 + (2y + 1)^2 = 1$ 2 puncte
 $(x - 2)^2 \leq 1 \rightarrow |x - 2| \leq 1 \Rightarrow$ și analog pentru $2y + 1$ 1 punct
 Se adună membru cu membru relațiile $-1 \leq x - 2 \leq 1$ și $-1 \leq 2y + 1 \leq 1$ și finalizarea1 punct
- b) $\frac{-2a^2+6a-8}{a^2-2a+4} = \frac{-a^2+2a-4-a^2+4a-4}{a^2-2a+4} = -1 - \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2+3}$ 2 puncte
 Cum $\frac{(a-2)^2}{(a-1)^2+3} \geq 0 \Rightarrow -1 - \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2+3} \leq -1$ deci valoarea maximă este -1 , valoare care se atinge pentru $a = 2$, pentru care fracția are sens.....1 punct

SUBIECTUL 2 (7 puncte)

Fie $E(x) = \left[\frac{81}{(x-3)(x+3)(x^2+9)+81} - \frac{1}{16-(4+x)(4-x)} \right] : 2 \cdot \left(\frac{x+9}{x^4} \right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-9, 0\}$.

- a) Arătați că $E(x) = \frac{9-x}{2}$
- b) Calculați $E(1) \cdot E(2) \cdot E(3) \cdot \dots \cdot E(2014)$
- c) Aflați suma primelor 30 de zecimale ale numărului $\left(E\left(\frac{19}{2}\right) \right)^{50}$.

Soluție:

- a) Efectuarea calculelor și aducerea la forma $E(x) = \frac{9-x}{2}$ 2 puncte
- b) $E(9) = 0 \Rightarrow E(1) \cdot E(2) \cdot E(3) \cdot \dots \cdot E(2014) = 0$ 2 punct
- c) $\left(E\left(\frac{19}{2}\right) \right)^{50} = \frac{1}{2^{100}}$ 1 punct
 $\frac{1}{2^{100}} = \frac{1}{(2^{10})^{10}} = \frac{1}{(1024)^{10}} < \frac{1}{(1000)^{10}} = \frac{1}{10^{30}} = 0,000 \dots 01$ această fracție având 30 zecimale1 puncte
 Deci $\frac{1}{2^{100}}$ are primele 30 de zecimale egale cu 0, suma lor fiind 0.....1 punct.

SUBIECTUL 3 (7 puncte)

Punctele A,B,C și D sunt necoplanare iar M este mijlocul segmentului [BC], T este mijlocul segmentului [AC], N ∈ [AC] încât AN=2NC, P ∈ [AB] încât AP=3PB și R este simetricul punctului M față de punctul N. Demonstrați că punctele D, P, T și R sunt coplanare.

Soluție:

Patrulaterul MERT este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc) $\Rightarrow$ ME $\parallel$ RT (1).....2 punct

[ME] este linie mijlocie în $\triangle CBN \Rightarrow$ ME $\parallel$ BN(2)..... 1punct

$\frac{AP}{AB} = \frac{AT}{AN} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ BN $\parallel$ PT (3) (Reciproca teoremei lui Thales) și ME $\parallel$ PT.....1 punct

Din relațiile (2) și (3) rezultă că ME $\parallel$ PT ceea ce împreună cu relația (1) implică faptul că punctele R,T și P sunt coliniare. 2punct

Finalizare 1 punct

SUBIECTUL 4 (7 puncte)

ABCD A'B'C'D' este un paralelipiped dreptunghic iar $AC \cap BD = \{O\}$. Ducem $AM \perp A'B$, $ME \perp A'B$, $CN \perp C'B$, $NE \perp C'B$ și $DP \perp D'B$, $PE \perp D'B$.

- Arătați că $PC \perp (AMP)$.
- Dacă, în plus, $MN \parallel (ABC)$, demonstrați că ABCD este pătrat.

Soluție:

- Justificare că $AM \perp (A'BC)$ (1)..... 1 punct

$PC \subset (A'BC)$ și împreună cu (1) $\Rightarrow AM \perp PC$ (2) 1 punct

$DP \perp D'B \Rightarrow [PO]$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic DPB $\Rightarrow PO = \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AP \perp PC$ (3) 1punct

Din relațiile (2) și (3) rezultă că $PC \perp (AMP)$ 1 punct

- $MN \parallel (ABC) \Rightarrow MN \parallel (A'B'C')$ și cum $(BMN) \cap (A'B'C') = A'C' \Rightarrow MN \parallel A'C'$

$\Rightarrow \frac{BN}{C'N} = \frac{BM}{A'M}$ (4) (conform teoremei lui Thales) 1 punct

În $\triangle AA'B$ aplicăm de două ori teorema catetei: $AB^2 = BM \cdot A'B$ și $AA'^2 = A'M \cdot A'B$

Împărțim aceste două relații și obținem $\frac{BM}{A'M} = \frac{AB^2}{AA'^2}$ (5)1 punct

Se procedează analog în $\triangle CC'B$ și obținem $\frac{BN}{C'N} = \frac{CB^2}{CC'^2}$ (6) iar din relațiile (4),(5) și (6) rezultă cerința 1 punct

Notă: Orice soluție corectă diferită de cea a autorului se punctează corespunzător.

Comisia de evaluare poate modifica în mod unitar distribuția punctelor.

Inspectoratul Școlar Județean
Buzău

Societatea de Științe Matematice
Filiala Buzău

**Olimpiada de matematică 2014
faza locală**

Clasa a IX-a

1. Numerele naturale impare sunt grupate în felul următor:

$$\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \dots$$

Aflați suma numerelor din grupa numărul n . Justificați răspunsul.

2. Să se arate că ecuația

$$[x] \cdot \{x\} = \frac{2013}{2014}$$

are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor raționale.

3. Fie a și b numere pozitive care verifică

$$a \leq 1, \quad a + b \leq 5.$$

Să se arate că

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 3.$$

Când are loc egalitatea?

4. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$. Segmentele MC și NB se intersectează în punctul T . Dreapta AT intersectează MN și BC în punctele P și D .

Să se arate că rapoartele

$$\frac{AM}{MB}, \frac{AP}{PD}, \frac{AN}{NC}$$

sunt în progresie aritmetică.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Școlar Județean
Buzău

Societatea de Științe Matematice
Filiala Buzău

Olimpiada de matematică 2014
faza locală

Clasa a X-a

1. Fie a și b numere pozitive distincte. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x - b^2} - \sqrt{x - a^2} = a - b.$$

2. Fie A, B, C puncte distincte în plan, de afixe a, b, c . Să se arate că dacă

$$|2a - b - c| = |b - c|,$$

atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

3. Să se arate că

a)

$$\log_{a+1} a < \log_{a+2} (a + 1),$$

pentru orice $a > 0$.

b)

$$\log_5 4 \cdot \log_7 6 \cdot \dots \cdot \log_{81} 80 > \frac{1}{2}.$$

4. Fie $x > y > 0$ numere reale care verifică egalitatea

$$x^y = y^x.$$

Să se arate că există $s > 0$ astfel încât

$$x = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}, \quad y = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Școlar Județean
Buzău

Societatea de Științe Matematice
Filiala Buzău

**Olimpiada de matematică 2014
faza locală**

Clasa a XI-a

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2014} = 0_2.$$

Să se arate că A este inversabilă și să se dea un exemplu de astfel de matrice.

2. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} \right)$$

să existe, să fie finită și nenulă.

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice astfel încât toți minorii de ordinul $n-1$ sunt egali între ei. Să se arate că $\det A = 0$.

4. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = \sqrt{6}$, și pentru $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Școlar Județean
Buzău

Societatea de Științe Matematice
Filiala Buzău

Olimpiada de matematică 2014
faza locală

Clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o submulțime proprie a sa. Să se arate că dacă pentru orice $x \in H$ și orice $y \in G - H$ rezultă $x \cdot y \in G - H$, atunci H este subgrup al lui G .

2. Fie A un inel în care $x^6 = x$, pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$.

3. Să se calculeze

$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{3 \cos x + 2 \sin x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Să se calculeze

$$\int (5x^5 + 3x^3) \sqrt{x^3 + x} dx, \quad x > 0.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada de matematică 2014
faza locală

Clasa a IX-a
Soluții și bareme

1. Numerele naturale impare sunt grupate în felul următor:

$$\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \dots$$

Aflați suma numerelor din grupa numărul n . Justificați răspunsul.

Soluție. Se observă că suma căutată este, probabil, n^3 1p
Se arată ușor prin inducție (sau direct) că suma primelor n numere naturale impare este
 $S_n = n^2$ 2p
În primele n grupe se află $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ numere impare, iar în primele $n-1$ grupe,
 $\frac{n(n-1)}{2}$ numere impare. 2p
Deducem că suma căutată este

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} - S_{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n^3.$$

..... 2p

2. Să se arate că ecuația

$$[x] \cdot \{x\} = \frac{2013}{2014}$$

are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor raționale.

Soluție. O clasă de soluții este, de exemplu,

$$x = 2013n + \frac{1}{2014n},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Doar o soluție particulară (sau un număr finit de astfel de soluții) 1p

O clasă infinită de soluții 7p

3. Fie a și b numere pozitive care verifică

$$a \leq 1, \quad a + b \leq 5.$$

Să se arate că

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 3.$$

Când are loc egalitatea?

Soluție. Avem

$$2(\sqrt{a} - 1)^2 + (\sqrt{b} - 2)^2 \geq 0,$$

..... 3p

inegalitate echivalentă cu

$$4(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \leq 2a + b + 6.$$

..... 1p

Dar

$$2a + b + 6 = a + (a + b) + 6 \leq 1 + 5 + 6 = 12,$$

de unde concluzia.....2p

Egalitatea are loc dacă $a = 1$ și $b = 4$1p

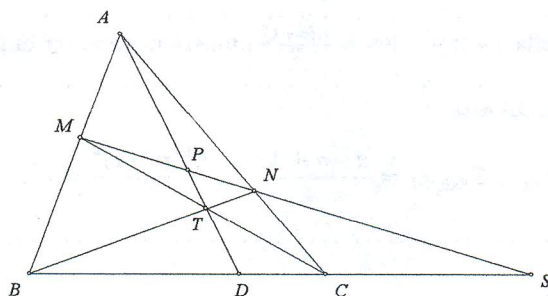
4. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$. Segmentele MC și NB se intersectează în punctul T . Dreapta AT intersectează MN și BC în punctele P și D .

Să se arate că rapoartele

$$\frac{AM}{MB}, \frac{AP}{PD}, \frac{AN}{NC}$$

sunt în progresie aritmetică.

Soluție.



Avem de arătat că

$$\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 2 \cdot \frac{AP}{PD} \quad (*)$$

.....1p

Dacă $MN \parallel BC$, cele trei rapoarte sunt egale și concluzia e evidentă.....1p

Dacă nu, fie $\{S\} = MN \cap BC$. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABD , obținem

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{PD}{PA} \cdot \frac{SB}{SD} = 1.$$

de unde $\frac{PD}{PA} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{SD}{SB}$3p

Similar, $\frac{PD}{PA} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{SD}{SC}$. Înlocuind în (*) $2 \cdot \frac{PD}{PA} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{SB}{SD} + \frac{AN}{NC} \cdot \frac{SC}{SD}$ și efectuând calculul, obținem

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{MB}{AM} \cdot \frac{CD}{BD} = 1,$$

relație adevărată, care rezultă din teorema lui Ceva.....2p

Olimpiada de matematică 2014
faza locală

Clasa a X-a
Soluții și bareme

1. Fie a și b numere pozitive distincte. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x-b^2} - \sqrt{x-a^2} = a-b.$$

Soluție. Trebuie să avem $x \geq a^2, x \geq b^2$ 1p
Ecuația se scrie echivalent

$$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{x-b^2} + \sqrt{x-a^2}} = a-b,$$

..... 3p

de unde

$$\sqrt{x-b^2} + \sqrt{x-a^2} = a+b.$$

Adunând cu ecuația inițială, obținem

$$\sqrt{x-b^2} = a,$$

..... 2p

de unde $x = a^2 + b^2$, care evident este soluție..... 1p

2. Fie A, B, C puncte distincte în plan, de afixe a, b, c . Să se arate că dacă

$$|2a - b - c| = |b - c|,$$

atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Soluție. Avem, echivalent,

$$\left| a - \frac{b+c}{2} \right| = \frac{|b-c|}{2},$$

..... 2p

deci, dacă M e mijlocul laturii BC , egalitatea precedentă se scrie

$$AM = \frac{1}{2}BC.$$

..... 3p

Deducem că A se află pe cercul de diametru BC , deci $\angle A = 90^\circ$ 2p

3. Să se arate că

a)

$$\log_{a+1} a < \log_{a+2} (a+1),$$

pentru orice $a > 0$.

b)

$$\log_5 4 \cdot \log_7 6 \cdot \dots \cdot \log_{81} 80 > \frac{1}{2}.$$

Soluție. a) Inegalitatea e echivalentă cu

$$\log_{a+1} a \cdot \log_{a+1} (a+2) < 1. \quad (*)$$

Să observăm că

$$\log_{a+1} a + \log_{a+1} (a+2) = \log_{a+1} (a^2 + 2a) < \log_{a+1} (a^2 + 2a + 1) = 2,$$

și atunci (*) se obține din inegalitatea mediilor 3p

b) Fie

$$A = \log_5 4 \cdot \log_7 6 \cdot \dots \cdot \log_{81} 80$$

și

$$B = \log_4 3 \cdot \log_6 5 \cdot \dots \cdot \log_{80} 79.$$

Atunci din a) avem $A > B$ iar $AB = \frac{1}{4}$. Deducem $A > \frac{1}{2}$ 4p

4. Fie $x > y > 0$ numere reale care verifică egalitatea

$$x^y = y^x.$$

Să se arate că există $s > 0$ astfel încât

$$x = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}, \quad y = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s.$$

Soluție. Observăm că $x, y \neq 1$ 1p

Fie $y = tx$ 1p

Atunci avem

$$x^y = y^x \Leftrightarrow x^{tx} = (tx)^x \Leftrightarrow (x^t)^x = (tx)^x \Leftrightarrow x^t = tx \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{t-1}}.$$

..... 3p

De aici

$$y = tx = t^{\frac{t}{t-1}}.$$

Fie

$$s = \frac{1}{t-1}.$$

Atunci

$$t = 1 + \frac{1}{s}$$

și obținem imediat concluzia dorită. 2p

Olimpiada de matematică 2014
faza locală

Clasa a 11-a
Soluții și bareme

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea

$$I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2014} = 0_2.$$

Să se arate că A este inversabilă și să se dea un exemplu de astfel de matrice.

Soluție. Avem

$$A + A^2 + \dots + A^{2014} = -I_2,$$

sau

$$A(-A - A^2 - \dots - A^{2013}) = I_2$$

..... (3 p)
Deducem că A este inversabilă și că

$$A^{-1} = -A - A^2 - \dots - A^{2013}.$$

..... (1 p)
Un exemplu posibil este

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

unde $a \neq 1$ este o rădăcină complexă de ordinul 2015 a unității.....3p

2. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$$

să existe, să fie finită și nenulă.

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}. \end{aligned}$$

..... (4 p)
 Se obține $k = \frac{3}{2}$ 3 p

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice astfel încât toți minorii de ordinul $n - 1$ sunt egali între ei. Să se arate că $\det A = 0$.

Soluție. Fie d valoarea comună a minorilor de ordin $n - 1$. Atunci

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -d & d & \dots \\ -d & d & -d & \dots \\ d & -d & d & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Înmulțind liniile de ordin par cu -1 , obținem ușor că $\det(A^*) = 0$ 4 p
 Dar $AA^* = \det A \cdot I_n$, de unde $\det A = 0$ 3 p

4. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = \sqrt{6}$, și pentru $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}.$$

Soluție. Se arată inductiv că șirul este crescător 2 p
 și mărginit superior de 3 2 p
 deci convergent 1 p
 Trecând la limită în relația de recurență obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ 2 p

Olimpiada de matematică 2014

faza locală

Clasa a XII-a

Soluții și bareme

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o submulțime proprie a sa. Să se arate că dacă pentru orice $x \in H$ și orice $y \in G - H$ rezultă $x \cdot y \in G - H$, atunci H este subgrup al lui G .

Soluție. Arătăm că $e \in H$. Dacă $e \in G - H$, luând un $x \in H$, ar rezulta $ex = x \in G - H$, absurd.....3p

Fie acum $x \in H$. Arătăm că $x^{-1} \in H$. Dacă $x^{-1} \in G - H$, atunci $xx^{-1} = e \in G - H$, absurd.....2p

Fie $x, y \in H$. Arătăm că $xy \in H$. Să presupunem $xy \in G - H$. Conform celor precedente, $x^{-1} \in H$. Dar atunci $x^{-1}(xy) = y \in G - H$, absurd..... 2p

2. Fie A un inel în care $x^6 = x$, pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$.

Soluție. Pentru $x = -1$, obținem $1 = -1$, deci $1 + 1 = 0$, de unde $x + x = 0$, pentru orice x 2p

Apoi, pentru $x \in A$,

$$\begin{aligned} 1 + x &= (1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6 \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 \end{aligned}$$

..... 2p
deci

$$0 = x^2 + x^4.$$

..... 2p

Deducem

$$x = x^6 = x^4 x^2 = -x^2 x^2 = -x^4 = x^2,$$

ceea ce doream. 1p

3. Să se calculeze

$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{3 \cos x + 2 \sin x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluție. Aflăm a, b astfel ca

$$3 \sin x + 2 \cos x = a(3 \cos x + 2 \sin x) + b(3 \cos x + 2 \sin x)'$$

..... 3p

Obținem

$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{3 \cos x + 2 \sin x} dx = \frac{1}{13} (12x - \ln(2 \sin x + 3 \cos x)) + C.$$

..... 4p

4. Să se calculeze

$$\int (5x^5 + 3x^3) \sqrt{x^3 + x} dx, \quad x > 0.$$

Soluție. Avem

$$\int (5x^5 + 3x^3) \sqrt{x^3 + x} dx = \int (5x^4 + 3x^2) \sqrt{x^5 + x^3} dx.$$

.....3p
Cu substituția $x^5 + x^3 = t$, avem $(5x^4 + 3x^2) dx = dt$,.....1p
și integrala devine

$$\int \sqrt{t} dt,$$

de unde

$$\int (5x^5 + 3x^3) \sqrt{x^3 + x} dx = \frac{2}{3} (x^6 + x^4) \sqrt{x^3 + x} + C$$

..... 3p