

Barem clasa a XII-a

1. a) Numărul elementelor lui M este 36.2p
b) Se poate verifica ușor faptul că $(M, +)$ formează grup, cu elementul neutru O_2 , deci dacă $A \in M$ atunci și $-A \in M$. Din egalitatea $A = -A$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$a, b \in \{\hat{0}, \hat{3}\} \text{ deci } A \in \left\{ \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} \right\} \text{ deci}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix}, B_1, -B_1, B_2, -B_2, \dots, B_{16}, -B_{16} \right\}, \text{ și suma elementelor lui } M \text{ este egală cu:}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$$

c) $\det A = \hat{1} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_6$, verifică $\begin{cases} a = \hat{1} \\ b = \hat{0} \end{cases}, \begin{cases} a = \hat{2} \\ b = \hat{3} \end{cases}, \begin{cases} a = \hat{4} \\ b = \hat{3} \end{cases}, \begin{cases} a = \hat{5} \\ b = \hat{0} \end{cases}$

Notând $A_1 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix}$ $G = \{I_2, A_1, A_2, A_3\}$ și tabla operației de înmulțire este:

$\cdot$	I_2	A_1	A_2	A_3
I_2	I_2	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	I_2	A_3	A_2
A_2	A_2	A_3	I_2	A_1
A_3	A_3	A_2	A_1	I_2

Rezultă $(G, \cdot)$ grup.

.....3p

2. a) $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(x - 2b[x] + b[2x]) =$
 $= x - 2b[x] + b[2x] - 2a[x - 2b[x] + b[2x]] + a[2x - 4b[x] + 2b[2x]] =$
 $= x - 2b[x] + b[2x] - 2a[x] + 4ab[x] - 2ab[2x] + a[2x] - 4ab[x] + 2ab[2x] =$
 $= x - 2(a+b)[x] + (a+b)[2x] = f_{a+b}(x).$

(Am folosit relația $[x+\alpha] = [x] + \alpha$, pentru $\alpha \in \mathbb{Z}$). Deci $(f_a \circ f_b) = f_{a+b}$3p

- b) Folosind relația de la a) se verifică axiomele grupului comutativ.....2p
 Funcția $g: \mathbb{Z} \rightarrow G, g(a) = f_a$ este izomorfism de grupuri.....2p

3. Notând:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

și

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - x = t \Rightarrow I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t + \cos t}{\cos t + \sin t + 1} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 t + \cos t}{\cos t + \sin t + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t + 1 - \sin^2 t - \sin t}{\cos t + \sin t + 1} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 t + \sin t}{\cos t + \sin t + 1} \right) dt = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

deci

$$I = \frac{\pi}{4}$$

4. a) Folosind inegalitatea $e^t \geq t + 1, t \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt \geq \int_0^x 1 dt = x$, deci $f(x) \geq x, \forall x \in [0, \infty)$.

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{e^x}{x}} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\frac{e^x(x-1)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{\frac{e^x(x-1)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \end{aligned}$$

Observație. Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.

Teleorman