



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019**

CLASA a V-a

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

1. a) Considerăm numerele naturale nenule mai mici decât 4001 care sunt pătrate perfecte.

Câte dintre aceste numere nu se divid cu 5 ?

- b) Se consideră numerele : $a = 222222 \cdot 999999$ și $b = 333333 \cdot 666667$.

Fără a efectua înmulțirea celor două numere, să se determine care este mai mare.

2. Există numere naturale x și y care verifică egalitatea

$$x^2 - 7y^2 = 2019 \quad ?$$

3. Se consideră numărul $a = 23^{4n+3} + 8 \cdot 23^{4n+2} + 101$, unde n este un număr natural.

Să se determine ultima cifră a câtului obținut prin împărțirea lui a prin 31.

4. Determinați numerele naturale a, b, c pentru care

$$2^a + 4^b + 8^c = 16^{100}$$



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a V-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor : Vlad Florentin Drinceanu

a) Considerăm numerele naturale nenule mai mici decât 4001 care sunt pătrate perfecte.

Câte dintre aceste numere nu se divid cu 5 ?

b) Se consideră numerele : $a = 222222 \cdot 999999$ și $b = 333333 \cdot 666667$.

Fără a efectua înmulțirea celor două numere, să se determine care este mai mare.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $1 \leq a^2 \leq 63^2, a^2 \neq 25k^2$	2p
Cum $k^2 \leq 160, k \leq 12$; Sunt $63 - 12 = 51$ numere.	2p
b) $a = 18 \cdot 111111^2$; $b > 333333 \cdot 666666 = 18 \cdot 111111^2$	2p
Concluzie $a < b$	1p

Enunț subiect 2, autor : Daniela Chiteș.

Există numere naturale x și y care verifică egalitatea: $x^2 - 7y^2 = 2019$?

Detalii rezolvare	Barem asociat
Restul împărțirii numărului 2019 la 7 este 3, deoarece $2019 = 7 \cdot 288 + 3$	1p
$x^2 = 7y^2 + 2019$	1p
Membrul drept este de forma $M7 + 3$	1p
Demonstrarea că x^2 poate avea doar formele : $M7, M7 + 1, M7 + 2, M7 + 4$	3p
Finalizare	1p

Enunț subiect 3, autor : Costel Chiteș, Liliana Maria Toderiuc Fedorca

Se consideră numărul $a = 23^{4n+3} + 8 \cdot 23^{4n+2} + 101$, unde n este un număr natural.

Să se determine ultima cifră a câtului obținut prin împărțirea lui a prin 31.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$23^{4n+2}(23+8)+101=23^{4n+2} \cdot 31+31 \cdot 3+8=31(23^{4n+2}+3)+8$	3p
Identificarea câtului $c = 23^{4n+2} + 3$	1p
$u(23^{4n+2}+3)=u(3^{4n+2}+3)=u(9+3)=2$	3p

Enunț subiect 4, autor Vasile Scurtu, G.M.11 /2018

Determinați numerele naturale a, b, c pentru care $2^a + 4^b + 8^c = 16^{100}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$2^a + 2^{2b} + 2^{3c} = 2^{400}$	1p
Dacă $3c = 399$ atunci $c = 133$ și $2^a + 2^{2b} = 2^{399}$	1p
Dacă $a = 399$, atunci $2^{2b} = 0$, contradicție. Deci $a \leq 398$. Atunci $2^a + 2^{2b} \leq 2^{398} + 2^{398}$ sau $2^a + 2^{2b} \leq 2^{399}$. Egalitatea are loc pentru $a = 398, b = 199$	2p
Dacă $3c < 399$, atunci $3c \leq 396$ și deducem $2^a + 2^{2b} + 2^{3c} \leq 2^a + 2^{398} + 2^{396} \leq 2^{399} + 2^{398} + 2^{396} < 2^{399} + 2^{398} + 2^{398} = 2^{400}$	2p
$a = 398, b = 199, c = 133$	1p