

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a V-a

Problema 1.

Să se calculeze:

a) $2012 + 2013 \cdot 2012 - 2014 \cdot 2011$

b) $3 + 5 + 7 + \dots + 2013 - 2 - 4 - 6 - \dots - 2012$

c) $\left[\left(2^8 \right)^3 : 2^5 \cdot \left(2^8 + 2^8 \right) + 4 - 4^8 : 2^{14} \right] : 2^{27} + 9$

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 2.

Fie numărul natural $A = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ cu n cifre, $n \geq 2$. Să se demonstreze că numărul natural $A - s(A)$ este multiplu al lui 9. ($s(n)$ este suma cifrelor numărului natural n).

Visilina Guiță, profesor, Galați

Problema 3.

a) Să se determine valorile naturale ale lui n și cifra nenulă x pentru care

$$3^{n+6} + 3^{n+5} + 3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+3} + 4 \cdot 3^n = \overline{xxxx}.$$

G.M.nr. 10.2012

b) Să se determine toate numerele naturale n , care împărțite la 9 dau câtul c și restul r , iar împărțite la 5 dau câtul r și restul c .

G.M.nr. 10.2012

Problema 4. Fie X cel mai mare număr natural format cu cifre nenule a căror sumă este 2013.

Să se determine câtul și restul împărțirii lui X la numărul 1001.

Visilina Guiță, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 2 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2013
CLASA a VI-a

Problema 1.

a) Să se calculeze cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale 2016, 2160 și 2376.

b) Numerele naturale 2041, 2178 și 2390 împărțite la același număr natural dau resturile 25, 18 respectiv 14. Să se determine împărțitorul.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 2.

Se consideră unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ astfel încât $m(\widehat{AOB}) = 23^\circ 25' 45''$ și $m(\widehat{BOC}) = 33^\circ 45' 34''$. Să se calculeze:

- a) $m(\widehat{AOC})$.
- b) $m(\widehat{COM})$, știind că $[OM]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$
- c) $m(\widehat{BOC}) - m(\widehat{AOB})$.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 3.

a). Să se determine numerele naturale prime a, b, c , cu $a \leq b \leq c$, astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{59}{70}$.

Popa Vasile, profesor, Galați

b). Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, știind că toate numerele de forma $n-1$, $n+5$, $n+11$, $n+17$, $n+23$ sunt numere prime pentru aceeași valoare a lui n , $n \geq 3$.

Manea Maricel, profesor, Galați

Problema 4.

Pe o dreaptă d se consideră punctele diferite $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{10}$, în această ordine, astfel încât lungimea segmentului $[A_0A_1]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_2]$, lungimea segmentului $[A_0A_2]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_3]$, lungimea segmentului $[A_0A_3]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_4]$, ..., lungimea segmentului $[A_0A_9]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_{10}]$. Fie $M_0, M_1, M_2, \dots, M_9$ respectiv mijloacele segmentelor $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_9A_{10}]$. Știind că lungimea segmentului $[A_9A_{10}]$ este 118098 cm, să se calculeze:

- a). lungimile segmentelor $[A_0A_1]$, $[A_4A_5]$, $[A_5A_6]$.
- b). distanța dintre punctele M_4 și M_7 .

Viorica Bujor, profesor, Galați

Notă Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 2 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2013
Clasa a VII-a

Problema 1. Fie numerele

$$a = \sqrt{176} - \sqrt{288} + \sqrt{4032};$$

$$b = -\sqrt{275} + \sqrt{450} - \sqrt{6300};$$

$$c = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{117}} + \frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{221}} + \frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{\sqrt{357}} + \frac{\sqrt{25}-\sqrt{21}}{\sqrt{525}}.$$

Să se demonstreze că $c + a : b \in \mathbb{N}$.

Visilina Guiță, profesor, Galați

Problema 2. Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$, $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela prin punctul O la AD intersectează pe (AB) în punctul E și pe (DC) în punctul F . Să se demonstreze că:

- a). $\triangle AED \sim \triangle BEC$.
- b). $[EO]$ este bisectoarea unghiului $\angle DEC$.
- c). $[EO] \equiv [OF]$.

Problemă selectată de
Visilina Guiță, profesor, Galați

Problema 3

- a). Să se indice un număr natural nenul n pentru care numărul $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 1}$ este rațional.
- b). Să se justifice că numărul $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2013}$ este număr natural.
- c). Numărul $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994}$ este număr natural?(Justificare).

Constantin Ursu, profesor, Galați

Problema 4. În triunghiul ABC , $m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB)$ și $AD \perp BC, D \in BC$. Punctele E și C sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB astfel încât $AE \perp BE$ și $\angle EAB \equiv \angle ACB$. Bisectoarea unghiului $\angle AED$ intersectează dreapta AC în M . Dacă $\{H\} = AE \cap BC$, arătați că:

- a). Triunghiurile BHA și AHC sunt isoscele.
- b). Patrulaterul $MCDE$ este paralelogram.
- c). Perimetrul paralelogramului $MCDE$ este egal cu perimetrul triunghiului ABC .

Problemă selectată de
Visilina Guiță, profesor, Galați
din G.M.nr.10, 2012

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2013

Clasa a VIII-a

Problema 1. Să se demonstreze că:

- a) $\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$.
- b) $\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}} + \frac{1}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\cdot\sqrt{99}+99\cdot\sqrt{100}} < \frac{19}{20}$.
- c) $\sqrt{x^2-8\cdot x+25} + \sqrt{4\cdot x^2+12\cdot x+25} > 7$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 2. Se consideră rombul $ABCD$ cu $AB = 8$ cm și $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$. Pe planul rombului $ABCD$, în punctul A , se ridică perpendiculara MA cu $MA = 6$ cm.

- a) Să se calculeze distanța dintre punctele M și D .
- b) Să se calculeze distanța de la A la planul (MBD) .
- c) Să se calculeze distanța de la M la dreapta BC .

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 3. Fie $a, b > 0$. Să se demonstreze inegalitățile:

- a). $(a^3+1) \cdot (b^3+1) \geq (a^2 \cdot b+1) \cdot (b^2 \cdot a+1)$.
- b). $a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a \cdot b \cdot (a+b)$, pentru $a, b \geq 1$ sau $a, b \leq 1$.

Vasile Popa, profesor, Galați

Problema 4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă, cu bazele pătrate, în care $AA' = AB \cdot \sqrt{2}$ și M, N, O sunt, respectiv, mijloacele segmentelor $[BB']$, $[DD']$, $[BD]$.

- a). Să se demonstreze că $A'B \perp (AMD)$.
- b). Dacă $\{G\} = A'O \cap (AMN)$, să se demonstreze că punctul G este centrul de greutate atât pentru triunghiul AMN cât și pentru triunghiul $A'BD$.
- c). Să se demonstreze că dreapta de intersecție a planelor (AMD) și (ANB) este perpendiculară pe planul $(A'BD)$.

Problemă selectată de
Ioana Lefteriu, profesor, Galați
G.M.nr.10, 2012

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2016

Clasa a IX-a

Problema 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\left[\frac{x-1}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] + \left[\frac{x+3}{2} \right] = \left[\frac{x+7}{3} \right] + \left[\frac{x+4}{3} \right] + \left[\frac{x+1}{3} \right].$$

Problemă prelucrată de
Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{5}{6}$ și $(n+1) \cdot a_{n+1} = (n-1) \cdot a_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Să se demonstreze că $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < 2, (\forall) n \geq 1$.

Problemă selectată de
Viorica Bujor, profesor, Galați
din G.M.nr. 6-7-8, 2012

Problema 3. Fie numărul natural $a = \underbrace{111\dots 110}_{(n-1) \text{ cifre}} \underbrace{222\dots 22}_{n \text{ cifre}} + x$, unde $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Să se determine $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, știind că numărul a este pătrat perfect.

Ioan Toderiță, profesor, Galați

Problema 4. În triunghiul ABC cu $BC = 4$, $CA = 6$, $AB = 3$, notăm centrul de greutate cu G ,

iar centrul cercului înscris în triunghi cu I . Dacă $GI \cap AB = \{M\}$ și $GI \cap AC = \{N\}$, să se

calculeze valoarea rapoartelor $\frac{MB}{MA}$, $\frac{NC}{NA}$.

Iuliana Duma, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2013

Clasa a X-a

Problema 1.

- a). Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(11+6\sqrt{2})^x = 6 \cdot (3+\sqrt{2})^x - 7$.
- b). Să se determine numerele naturale n pentru care are loc egalitatea:
- $$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

Problemă selectată de
Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 2. Fie $z_A, z_B \in \mathbb{C}$, afixele punctelor A respectiv B , de forma:

$$z_A = a + b \cdot i, z_B = b + a \cdot i, a, b \in \mathbb{R}^*, b < a.$$

- a). Să se determine o relație între a și b , astfel ca triunghiul AOB să fie echilateral. Să se determine triunghiurile echilaterale OAB cu aria $\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- b). În condiția $0 < b < a$, pe latura AB a triunghiului echilateral OAB se construiesc pătratele $ABCD, ABC'D'$. Să se calculeze afixele punctelor C, D, C', D' în funcție de b .

Ioan Toderiță, profesor, Galați

Problema 3. Fie numerele reale $a, b, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in (0, 1)$ astfel încât $b^n \leq x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$. Să se demonstreze că $(\log_a b)^n \geq \log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \log_a x_3 \cdot \dots \cdot \log_a x_n$.

Problemă selectată de
Viorica Bujor, profesor, Galați
din G.M.nr.11,2012

Problema 4. Să se demonstreze că nu există nicio funcție $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care verifică simultan proprietățile:

- a). $f(x+y) + f(x \cdot y^2) = f(x) \cdot f(y^3) + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$
- b). $f(1) = 2$.

Constantin Ursu, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2013

Clasa a XI-a

Problema 1.

$$\text{Fie } E(x, k) = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{k}} \\ \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{k}} & \sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{k}} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix}, \quad x, k \in \mathbb{R},$$

a) Să se calculeze $E(-k, k)$ și $E(\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sum_{k=1}^{2013} E(x, k) \geq 0$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galați

Problema 2.

a) Să se calculeze $E(k) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[k]{x} - \sqrt[k+2]{x}}{\sqrt[k+1]{x} - \sqrt[k+3]{x}}$, $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$.

b) Fie $P = \prod_{k=2}^{2n+1} E(k)$. Să se demonstreze că $P \in \mathbb{N}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galați

Problema 3. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir mărginit de numere reale pozitive cu proprietatea că

$\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n \cdot x_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{n \cdot x_n + n} - \sqrt{n \cdot x_n}, (\forall) n \geq 1$. Să se demonstreze că șirul este convergent.

Problemă selectată de
Vasile Popa, profesor, Galați
din G.M.nr.11,2012

Problema 4. Fie A și B două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente numere complexe, cu proprietatea $A \cdot B - B \cdot A = A$. Să se arate că $A \cdot B^n \cdot A = O_2, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Problemă selectată de
Vasile Popa, profesor, Galați
din G.M.nr.11,2012

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați
16 februarie 2013

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = (a \cdot x + 1) \cdot e^{b \cdot x + 2} \text{ să fie o primitivă a funcției } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{2 \cdot x + 2} \cdot (4 \cdot x + 4).$$

b) Să se calculeze $\int \sqrt{4 - x^2} dx, x \in [-2; 2]$.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 2. Se notează $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și pentru orice $t \in \mathbb{R}$ se consideră $f_t: E \rightarrow E$,

$$f_t(x, y) = \left(x + t \cdot y + \frac{t^2}{2}, y + t \right), \text{ pentru orice } (x, y) \in E. \text{ Considerând mulțimea}$$

$$G = \{f_t \mid t \in \mathbb{R}\}, \text{ să se demonstreze că :}$$

a) G are o structură de grup comutativ în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

b) G este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Problema 3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$ care satisface proprietatea $f'(x) - f(x) = x^2 + x + 1, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

a). Să se determine funcția f pentru $f(0) = 0$.

b). Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^x} = 4$.

Ioan Toderiță, profesor, Galați

Problema 4. Fie p un număr prim de forma $4 \cdot k + 3, k \in \mathbb{N}$.

a). Să se arate că ecuația $x^2 + 1 = \hat{0}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_p$.

b). Să se arate că dacă $x^2 + y^2 = \hat{0}, x, y \in \mathbb{Z}_p$, atunci $x = \hat{0}$ și $y = \hat{0}$.

c). Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + y^2 = 12005$.

Vasile Popa, profesor, Galați