Barem clasa a V-a

1. a) A conține numerele 45^2, 46^2, ….., 54^2, deci 10 pătrate perfecte………………3 p
b) Elementele lui A se pot scrie:
$11 \cdot 181 + 9$, $11 \cdot 181 + 10$, $\underbrace{11 \cdot 182}_{2002}$, …., $11 \cdot 183$, …. , $\underbrace{11 \cdot 272}_{2992}$, $11 \cdot 272 + 1$, …,
$11 \cdot 272 + 8$ deci suma resturilor va fi $9 + 10 + (272 - 182)(1 + 2 + \ldots + 10) + 1 + 2 + \ldots + 8 = 19 + 90 \cdot 55 + 36 = 5005$ ………………………………………………4 p

2. $n = 2^{10} \cdot 5^{10}(2 + 5) - 2013 = 10^{10} \cdot 7 - 2013$ ………………………………………… 3 p

$n = 7\underbrace{00\ldots\ldots0}_{10} - 2013 = 6\underbrace{999\ldots9}_{6}7987$ …………………………………………2p
deci suma cifrelor este $7 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 8 + 6 = 91$ ……………………………… 2 p

3. a) $x = (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \ldots + (3^{16} + 3^{17} + 3^{18} + 3^{19})$. Sumele din paranteze au ultima cifră 0, deci x are ultima cifră 0 ……………………..…...1 p
Ultima cifră a lui y este ultima cifră a numărului $6 \cdot 11 + 1$, deci 7 ……………….1 p
Ultima cifră a lui x + y este 7 ……………………………………………………..1 p
b) $2x = 3x - x = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{20} - 1 - 3 - 3^2 - \ldots - 3^{19} = 3^{20} - 1$, analog
$5y = 6y - y = 6^{12} - 1$ ………………………………………………………… 2 p
$2x = (3^5)^4 - 1$,
$5y = (6^3)^4 - 1$ și deoarece $3^5 = 243 > 216 = 6^3$ rezultă $2x > 5y$ ……… 2 p

4. Presupunem că ar exista $\overline{abcd}$ un număr de patru cifre distincte, in baza 10, cu proprietatea $\overline{abcd} = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{ad} + \overline{da} + \overline{aa} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{bd} + \overline{db} + \overline{bb} + \overline{cd} + \overline{dc} + \overline{cc} + \overline{dd} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{abcd} = 44 \cdot (a + b + c + d)$. Valoarea maximă a sumei a patru cifre distincte este $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ si, cum $44 \cdot 30 = 1320$, deducem că $\overline{abcd} \leq 1320 \Rightarrow a = 1, b \leq 3$. Așadar valoarea maximă a sumei $a + b + c + d$,cu respectarea inegalității, ar fi $1 + 2 + 8 + 9 = 20$, si cum $44 \cdot 20 = 880 \neq \overline{abcd}$, rezultă presupunere falsă………………………………………………………………
7p