

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10.02.2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1.

a) Să se determine valorile lui a și b , astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a\sqrt[3]{x^3 + bx^2 + a} + b\sqrt{x^2 + ax + b} - 5x \right) = 5;$$

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2k + 2}{k(k+1)(k+2)!} \right)^{(n+3)!}$

Barem de corectare.

a) Fie $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a\sqrt[3]{x^3 + bx^2 + a} + b\sqrt{x^2 + ax + b} - 5x \right)$.

Deoarece pentru $a + b \neq 5$, $|L| = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left| a\sqrt[3]{1 + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^3}} + b\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}} - 5 \right| = +\infty$,
pentru ca limita să fie finită este necesar ca $a + b = 5$ (2p)

Astfel, $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a \left(\sqrt[3]{x^3 + bx^2 + a} - x \right) + b \left(\sqrt{x^2 + ax + b} - x \right) \right) = a \cdot \frac{b}{3} + b \cdot \frac{a}{2} = \frac{5ab}{6}$,
de unde $L = 5 \Leftrightarrow a + b = 5$ și $ab = 6 \Leftrightarrow (a, b) = (3, 2)$ sau $(a, b) = (2, 3)$ (2p)

b) Deoarece

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2k + 2}{k(k+1)(k+2)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)(k+2)!} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)!}, \dots (2p)$$

$$\text{limita din enunț este } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{(n+1)(n+2)!} \right)^{-(n+1)(n+2)!} \right] \frac{-(n+3)!}{(n+1)(n+2)!} = e^{-1}. (1p)$$

PROBLEMA 2. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_0 > 1$ și $x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ și să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt{x_n} - 1)$.

Barem de corectare. Deoarece $x_{n+1} - 1 = \frac{x_n - 1}{x_n + 2}$, inductiv se demonstrează că $x_n > 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (2p)

Astfel, cum $x_{n+1} - x_n = \frac{(1 - x_n)(1 + x_n)}{x_n + 2} < 0$, șirul este descrescător. (2p)

Așadar, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent. Trecând la limită în relația de recurență, se obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ (1p)

Cum $x_{k+1} - 1 = \frac{x_k - 1}{x_k + 2} < \frac{x_k - 1}{3}$, avem $x_n - 1 < \frac{x_{n-1} - 1}{3} < \frac{x_{n-2} - 1}{3^2} < \dots < \frac{x_0 - 1}{3^n}$, de unde

$$|n^2(\sqrt{x_n} - 1)| = \frac{n^2}{\sqrt{x_n} + 1}(x_n - 1) < \frac{n^2}{\sqrt{x_n} + 1} \frac{x_0 - 1}{3^n} = \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_n} + 1} \cdot \frac{n^2}{3^n} \rightarrow 0. \text{ Așadar,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt{x_n} - 1) = 0. \dots \dots \dots (2p)$$

PROBLEMA 3. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$, ecuația matriceală $X^2 = A$, unde $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Barem de corectare. Din teorema lui Hamilton-Cayley, $X^2 = \text{tr } X \cdot X - \det X \cdot I_2$, iar din $\det X^2 = \det A = 4$, obținem că $\det X = \pm 2$. $\dots \dots \dots (2p)$

Astfel, $X^2 = \text{tr } X \cdot X \pm 2I_2$, iar ecuația devine $\text{tr } X \cdot X = A \pm 2I_2$, de unde $X = \frac{1}{\text{tr } X}(A \pm 2I_2)$.
 Urma lui X se determină din $(\text{tr } X)^2 = \text{tr}(\text{tr } X \cdot X) = \text{tr}(A \pm 2I_2) = \text{tr } A \pm 2 \text{tr } I_2. \dots \dots \dots (3p)$

Așadar,

• Dacă $\det X = 2$, atunci $\text{tr } X = \pm\sqrt{33}$, de unde $X = \pm \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 15 & 24 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (1p)$

• Dacă $\det X = -2$, atunci $\text{tr } X = \pm 5$, de unde $X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (1p)$

PROBLEMA 4. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $\text{tr } A^{2024} = 1$ și $\det(A^{2023} + A^{2022} + \dots + A + I_2) = 0$, atunci $\det A = 0$.

Barem de corectare.

Dacă $B = A^{2024}$, atunci, din $B - I_2 = A^{2024} - I_2 = (A - I_2)(A^{2023} + A^{2022} + \dots + A + I_2)$ rezultă că $\det(B - I_2) = 0. \dots \dots \dots (3p)$

Fie acum $f(x) = \det(B - x \cdot I_2) = x^2 - \text{tr } B \cdot x + \det B = x^2 - x + \det B. \dots \dots \dots (3p)$

Cum $f(1) = \det(B - I_2) = 0$, obținem că $\det B = 0 \Rightarrow \det A = 0. \dots \dots \dots (1p)$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.