

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a VIII-a

Barem de evaluare și notare

1. i) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$, demonstrați că $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$.
- ii) Dacă numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0, c > 0$ verifică relația $a^2 + b^2 + 2abc + ab = abc^2$, demonstrați că $c \geq 3$.

a) $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.	2p
b) $a^2 + b^2 + 2abc + ab = abc^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 + 2abc = abc^2 + ab$	1p
$(a+b)^2 = ab(c-1)^2$	1p
$\frac{(a+b)^2}{ab} = (c-1)^2$	1p
Deducem că $ c-1 \geq 2$, conform a), de unde $c \geq 3$ sau $c \leq -1$	1p
Cum $c > 0$, avem că $c \geq 3$.	1p

2. Să se arate că dacă m și n sunt numere naturale nenule atunci $\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} \neq 1$. Prin $\{x\}$ se înțelege partea întreagă a numărului real x .

Cazul I: Dacă $m = n \Rightarrow \left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} = 0 \neq 1$.	1p
Cazul II: Dacă $m \neq n$ atunci $\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} = \frac{m}{n} - \left[\frac{m}{n}\right] + \frac{n}{m} - \left[\frac{n}{m}\right]$ și presupunând prin reducere la absurd că $\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{n}{m}\right\} = 1 \Rightarrow$ $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 1 + \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{n}{m}\right],$ adică $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{m^2 + n^2}{mn} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow mn \mid m^2 + n^2$.	3p

Fie $d = (m, n)$. Atunci există $k, p \in \mathbb{N}, (k, p) = 1$ astfel încât $m = dk$ și $n = dp$ și deci $\frac{d^2 k^2 + d^2 p^2}{d^2 kp} \in \mathbb{N}$, adică $\frac{k^2 + p^2}{kp} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow kp k^2 + p^2 \Rightarrow kp k^3 + kp^2 \Rightarrow kp k^3 \Rightarrow p k^2.$ Dar $(k, p) = 1$, obținem că $p k^2$ este fals și deci presupunerea făcută este falsă. Ca atare $\left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{n}{m} \right\} \neq 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$	3p
---	----

3. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, $M \in (AB), N \in (C' D')$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{C' N}{ND'} = \frac{1}{k}$, k număr real pozitiv
- Determinați k pentru care $\triangle MNC$ este isoscel;
 - Pentru $k = 1$, aflați cosinusul unghiului dintre planele (MNC) și (MBC) ;

Construcția figurii	1p
a) Notăm $AM = C' N = a \Rightarrow MB = ND' = ka \Rightarrow AB = BC = CC' = (k + 1)a$ Calculând lungimile laturilor $\triangle MNC$, obținem $MC^2 = a^2 [k^2 + (k + 1)^2]$, $NC^2 = a^2 [1 + (k + 1)^2] \text{ și } MN^2 = a^2 [(k - 1)^2 + 2(k + 1)^2].$ Cum $\triangle MNC$ este isoscel, avem posibilă doar congruența $(MC) \equiv (NC) \Rightarrow MC^2 = NC^2 \Rightarrow$ $k^2 + (k + 1)^2 = 1 + (k + 1)^2 \Rightarrow k = 1$	3p
b) Pentru $k = 1 \Rightarrow AM = MB, D' N = C' N$ Notăm $NP \perp DC, P \in DC, \alpha = (\angle((MNC), (MBC))) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{A_{\triangle MPC}}{A_{\triangle MNC}}$ $A_{\triangle MPC} = a^2, A_{\triangle MNC} = a^2 \sqrt{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$	3p

4. Piramidele patrulatere regulate $VABCD$ și $SABCD$ au apotemele $[VM]$ și $[SM]$ perpendiculare, M fiind mijlocul lui $[AD]$. Știind că $VS = 2SM$ arătați că $\frac{V_{SABCD}}{V_{VABCD}} = \frac{1}{3}$

Construcția figurii	1p
Notând $SV \cap (ABCD) = \{O\}$ se arată că $SO = h_{SABCD}, VO = h_{VABCD}, VO = 3SO$.	3p
$V_{VABCD} = \frac{A_{ABCD} \cdot VO}{3} = \frac{A_{ABCD} \cdot 3SO}{3} = 3V_{SABCD} \text{ și deci } \frac{V_{SABCD}}{V_{VABCD}} = \frac{1}{3}.$	3p