

12

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a XII- a



BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă	Punctaj
a) Prin inducție obținem: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = a^{n-1}(x-b)^n + b, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$ Ecuția din enunț se scrie: $a^{n-1}(x-b)^n + b = a^p + b \Leftrightarrow (x-b)^n = a^{1+p-n}.$ Obținem $x_n = a^{\frac{1+p-n}{n}} + b.$ Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^{-1} + b.$	1p 1p 1p
b) Avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\frac{a}{b}$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, f strict crescătoare, deci $G = \left(-\frac{a}{b}, 1\right).$ Funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \left(-\frac{a}{b}, 1\right)$, $f(x) = \frac{x-a}{x+b}$ este inversabilă și $f^{-1}: \left(-\frac{a}{b}, 1\right) \rightarrow (0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \frac{a+bx}{1-x}.$ Cum f^{-1} este morfism obținem $f^{-1}(x \Delta y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y) \Leftrightarrow x \Delta y = f\left(\frac{a+bx}{1-x} \cdot \frac{a+by}{1-y}\right) =$ $= f\left(\frac{a^2 + abx + aby + b^2yx}{1-x-y+xy}\right) = \frac{\frac{a^2 + abx + aby + b^2yx}{1-x-y+xy} - a}{\frac{a^2 + abx + aby + b^2yx}{1-x-y+xy} + b} =$ $= \frac{a^2 - a + a(b+1)x + a(b+1)y + (b^2 - a)xy}{a^2 + b + b(a-1)x + b(a-1)y + b(b+1)xy}.$	2p 2p

Problema 2: soluție orientativă	Punctaj
Din $a^3b = ba \Rightarrow a^3b^2 = bab \Rightarrow a^3 = bab \Rightarrow ba^3 = ab \Rightarrow ba^3b = a$.	1p
$\Rightarrow (ba^3b)(ba^3b)(ba^3b) = a^3$ de unde $ba^9b = a^3 \Rightarrow a^9 = ba^3b \Rightarrow a^9 = a$ $\Rightarrow a^8 = e$.	2p
Din $(ba^3b)(ba^3b) = a^2 \Rightarrow ba^6b = a^2 \Rightarrow ba^6 = a^2b \Rightarrow$	2p
$\Rightarrow (a^2b)^2 = a^2b \cdot a^2b = ba^6 \cdot a^2b = ba^8b = b^2 = e$.	2p
Problema 3: soluție orientativă	
Pentru $x \in (-a, a)$ avem:	
$I = \int x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})dx = \int x\sqrt{a+x}dx + \int x\sqrt{a-x}dx = I_1 + I_2.$	2p
Cu substituția $\sqrt{a+x} = t$ avem:	
$I_1 = \int x\sqrt{a+x}dx = \int (t^2 - a)t \cdot 2tdt = 2 \int t^2(t^2 - a)dt = 2 \int (t^4 - at^2)dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - a \frac{t^3}{3} \right) =$	
$= \frac{2}{5}(\sqrt{a+x})^5 - \frac{2}{3}a(\sqrt{a+x})^3.$	2p
Cu substituția $\sqrt{a-x} = t$ avem:	
$I_2 = \int x\sqrt{a-x}dx = \int (a - t^2)t \cdot (-2t)dt = 2 \int t^2(t^2 - a)dt = 2 \int (t^4 - at^2)dt =$	
$2 \left(\frac{t^5}{5} - a \frac{t^3}{3} \right) = \frac{2}{5}(\sqrt{a-x})^5 - \frac{2}{3}a(\sqrt{a-x})^3.$	
$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{5}(\sqrt{a+x})^5 - \frac{2}{3}a(\sqrt{a+x})^3 + \frac{2}{5}(\sqrt{a-x})^5 - \frac{2}{3}a(\sqrt{a-x})^3 =$	
$= \frac{2}{5} \left[(\sqrt{a+x})^5 + (\sqrt{a-x})^5 \right] - \frac{2}{3}a \left[(\sqrt{a+x})^3 + (\sqrt{a-x})^3 \right].$	2p
$\int x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) = \frac{2}{5} \left[(\sqrt{a+x})^5 + (\sqrt{a-x})^5 \right] - \frac{2}{3}a \left[(\sqrt{a+x})^3 + (\sqrt{a-x})^3 \right] + C.$	1p

Problema 4: soluție orientativă	Punctaj
a). Fie $F_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ primitiva funcției $f_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $F_1(0) = 0$. $F_1(x) = \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx =$ $= \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$	2p
Din $F_1(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + c = 0 \Rightarrow c = -\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{18}$. Deci $F_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{18}$	1p
b). $\int f_n(x) dx = \int \frac{x^{2n-1}+x^{n-1}}{x^{2n}+x^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \int \frac{2n \cdot x^{2n-1}+2n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}+x^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \int \frac{2n \cdot x^{2n-1}+n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}+x^{n+1}} dx +$ $+ \frac{1}{2n} \int \frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}+x^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \ln(x^{2n}+x^n+1) + \frac{1}{2n} \int \frac{n \cdot x^{n-1}}{\left(x^n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{1}{2n} \ln(x^{2n}+x^n+1) +$ $+ \frac{1}{n\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x^n+1}{\sqrt{3}} + C.$	2p
Deci $\int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x) dx = \frac{1}{2n} [\ln((n+1)^2+n+1+1) - \ln(n^2+n+1)] +$ $+ \frac{1}{n\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2n+3}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{2n+1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1} + \frac{1}{n\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2n^2+4n+3}.$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} \cdot \ln \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2n^2+4n+3} \right) =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 + \frac{2n+2}{n^2+n+1} \right)^{\frac{n}{2}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2n^2+4n+3}}{\frac{\sqrt{3}}{2n^2+4n+3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2n^2+4n+3} \right) =$ $= \ln e + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2+4n+3} = 1.$	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.