OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

22 februarie 2014

CLASA a VII-a

1. a) (4p) Arătaţi că $\sqrt{\frac{1\cdot 2}{3^2}}+\sqrt{\frac{2\cdot 3}{5^2}}+\sqrt{\frac{3\cdot 4}{7^2}}+.....+\sqrt{\frac{4028\cdot 4029}{8057^2}}\leq 2014$.

b) Fie **(3p)** $x=\sqrt{\left[\frac{7}{6}+\frac{8}{12}+\frac{9}{18}+...+\frac{506}{3000}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{500}\right)\right]\cdot 6}$. Arătaţi că $x\notin\mathbb{Q}$.

2. a) (4p) Arătaţi că, dacă $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_3}{b_3}$, unde $b_1,b_2,b_3>0$, atunci $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}<\frac{a_3}{b_3}$.

b) (3p) Câte numere de forma $\frac{\sqrt{\overline{abab}}}{\overline{ab}}$ verifică relaţia $2<\frac{\sqrt{\overline{abab}}}{\overline{ab}}<3$?

3. Fie triunghiul PQN şi M un punct oarecare pe latura $[PN]$ astfel încât $\frac{MN}{MP}=\frac{m}{n}$. Bisectoarea unghiului *QMN* intersectează latura $[NQ]$ în punctul *C*, bisectoarea unghiului *QMP* intersectează latura $[PQ]$ în punctul *D*, $MC\cap PQ=\{A\}$ și $MD\cap NQ=\{B\}$.

a) (2p) Arătaţi că $\frac{BN}{BQ}:\frac{AP}{AQ}=\frac{m}{n}$;

b) (5p) Aflați poziția punctului *M* pe latura $[PN]$ astfel încât *CD* să fie paralelă cu *NP*; apoi arătați că în acest caz patrulaterul *ABCD* este trapez.

4. Fie *ABCD* un patrulater convex şi *O* intersecţia diagonalelor sale. O dreaptă variabilă ce trece prin punctul *O* intersectează laturile (AB) şi (CD) în punctele *M* şi respectiv *N*. Să se arate că $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=\text{constant}$.

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.