



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a V-a

Barem de evaluare și notare

PROBLEMA 1

Se dau numerele

$$x = \left[3^{121} : 9^{60} + (5^3)^2 : (5^2)^2 \right] : 2^2 \cdot 3 - 3 \text{ și } y = 100 : \left\{ 23 + 34 : \left[(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 34^0 \cdot 1^{2013} \right] \right\}$$

a) Comparați numerele 3^x și 5^y

b) Demonstrați că $x^{2013} + y^{2014}$ nu este pătrat perfect.

Soluție:

a) $x = 18$ 2 puncte

$y = 4$ 2 puncte

$3^x = 27^6$, $5^y = 625$ 1 puncte

Deci $3^x > 5^y$ 0,5 puncte

b) $x^{2013} + y^{2014} = 18^{2013} + 4^{2014} = (16 + 2)^{2013} + 4^{2014} =$ 1 punct
 $= 4p + 2$

Deci $x^{2013} + y^{2014}$ nu este pătrat perfect 0,5 puncte

PROBLEMA 2

Se consideră numerele naturale nenule x, y, z . Împărțind pe x la y obținem câtul 4 și restul 3.

Împărțind pe y la z obținem câtul 5 și restul 4.

a) Arătați că $x \geq 100$.

b) Determinați numerele x, z, y știind că $x + y + z = 153$.

G.M.nr.4 E:14479

Soluție:

$x = 4y + 3$; $y > 3$ 0,5 puncte

$y = 5z + 4$; $z > 4$ 0,5 puncte

a) $z > 4 \Rightarrow 5z > 20 \Rightarrow 5z + 4 > 24 \Leftrightarrow y > 24$ 1 punct

$y > 24 \Rightarrow 4y > 96 \Rightarrow 4y + 3 > 99 \Leftrightarrow x > 99$ 1 punct

$x > 99$, $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 100$ 1 punct

b) $(4y + 3) + y + z = 153$ 1 punct

$5y + z = 150 \Rightarrow 5 \cdot (5z + 4) + z = 150 \Rightarrow z = 5$ 1 punct

$y = 29$; $x = 119$ 1 punct

PROBLEMA 3

a) Arătați că $\frac{\overline{xx9} + \overline{8x} + 7}{\overline{x9x} + \overline{x6}} \in N$, unde x este cifră în baza 10.

b) Calculați $2014 - (2013 \cdot 2012 + 2013) : 2013^2$.

Soluție:

a)

Calculează numărătorul și obține $100x + 10x + 9 + 8 \cdot 10 + x + 7 = 111x + 96$ 1 punct

Calculează numitorul și obține $100x + 9 \cdot 10 + x + 10x + 6 = 111x + 96$ 1 punct

Deci $\frac{\overline{xx9} + \overline{8x} + 7}{\overline{x9x} + \overline{x6}} = \frac{111x + 96}{111x + 96} = 1 \in N$ 2 puncte

b)

Scoaterea factorului comun din paranteză $2014 - 2013(2012 + 1) : 2013^2$ 1 punct

$2014 - 2013 \cdot 2013 : 2013^2$ 1 punct

Finalizare $2014 - 1 = 2013$ 1 punct

PROBLEMA 4

Se dau mulțimile : $A = \{x \in N^* \mid 2 \cdot x \leq 8\}$,

$B = \{x \in N^* \mid x = 2^{n-1}, n \in A\}$,

$C = \{x \in N \mid x = m - n, m \in B, n \in A, m > n\}$.

a) Determină elementele mulțimilor A , B și C ;

b) Determină elementele mulțimii $A \cap B \cap C$;

c) Stabilește valoarea de adevăr a propoziției: “Mulțimea $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$ conține numai numere consecutive.”

Soluție:

$2 \cdot x \leq 8$ și $x \in N^* \Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\}$ 1 punct

$x = 2^{n-1}, n \in A \Rightarrow B = \{1, 2, 4, 8\}$ 1 punct

$x = m - n, m \in B, n \in A, m > n \Rightarrow C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 1 punct

$A \cap B \cap C = \{1, 2, 4\}$ 1 punct

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 1 punct

$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = \{3, 5, 6, 7, 8\}$ 1 punct

Propoziția este FALSĂ (3, 5 nu sunt consecutive) 1 punct



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VI-a

Barem de evaluare și notare

PROBLEMA 1

Aflați numerele naturale a și b știind că $[a, b]$ este de 15 ori mai mare decât (a, b) și $5a + 3b = 150$. Am notat cu $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun și cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică

Soluție:

Fie $(a, b) = d$, atunci $a = d \cdot x$, $b = d \cdot y$, unde $x, y \in \mathbb{N}$ și $(x, y) = 1$ 1 punct

Din $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$ și $[a, b] = 15 \cdot d$, obținem $d \cdot x \cdot d \cdot y = 15 \cdot d^2$ 2 puncte

$x \cdot y = 15 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 15); (15, 1); (3, 5); (5, 3)\}$ 2 puncte

Prin înlocuire în relația $5a + 3b = 150$ obținem $d \in \{3, 5\}$ 1 punct

Finalizare: $(a, b) \in \{(3, 45); (15, 45)\}$ 1 punct

PROBLEMA 2

a) Fie numerele $a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}$ și $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014}$. Arătați că

$$\frac{a+b}{3} \in \mathbb{N}.$$

b) Calculați $S = 7 + 14 + 21 + \dots + 364$ și arătați că $53 \mid S$.

Soluție:

a) $a + b = \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots + \frac{2014}{2014} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 2013 = 3 \cdot 671$ 3 puncte
de 2013 ori

$\frac{a+b}{3} = 671 \in \mathbb{N}$ 1 punct

b) $S = 7 + 14 + 21 + \dots + 364 = 7 \cdot \frac{52 \cdot 53}{2}$ 2 puncte

finalizare $S = 963613$ 1 punct

PROBLEMA 3

Cu 6 ani în urmă vârsta fiicei era egală cu 0,2 din vârsta mamei, iar peste 9 ani vârsta fiicei va fi 0,5 din vârsta pe care o va avea mama. Câți ani are fiecare în prezent?

Soluție:

Stabilirea necunoscutelor: f - vârsta fiicei în prezent și m - vârsta mamei în prezent și formarea relațiilor

$$f - 6 = 0,2 \cdot (m - 6) \text{ și } f + 9 = 0,5 \cdot (m + 9) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Exprimăm necunoscuta f din ambele relații $f = \frac{m-6}{5} + 6$ respectiv $f = \frac{m+9}{2} - 9 \dots\dots\dots 2$
puncte

$$\text{Egalând obținem } \frac{m-6}{5} + 6 = \frac{m+9}{2} - 9 \Rightarrow m = 31 \text{ ani } \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Deci } f = \frac{m-6}{5} + 6 = 11 \text{ ani } \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

PROBLEMA 4

Dreptele AB și CD sunt concurente în O . Știind că semidreptele $[OM$, $[OT$, $[OR$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BOD$, $\angle DOM$ și respectiv $\angle COB$, iar $m(\angle AOM) = 130^\circ$,

calculați:

a) $m(\angle ROM)$ și $m(\angle AOD)$;

b) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\angle AOC$ și $\angle BOR$.

Soluție:

a)

Desen.....1punct

$$m(\angle ROM) = 90^\circ \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$m(\angle AOD) = 30^\circ \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b) Notarea bisectoarelor și explicare2 puncte

$$\angle AOC \equiv \angle DOB \text{ (opuse la vârf)} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Finalizare1punct



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 14 februarie 2014

Clasa a VII-a

Barem de evaluare și notare

PROBLEMA 1

Să se determine valorile întregi ale lui x , pentru care valoarea expresiei

$$E(x) = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}}{x-7} \text{ este număr întreg.}$$

Soluție:

$$E(x) = \frac{|1-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-\sqrt{5}| + |1-\sqrt{2}| + |3-\sqrt{5}| + |2-\sqrt{2}|}{x-7} = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1 + \sqrt{5}-\sqrt{3} + \sqrt{2}-1 + 3-\sqrt{5} + 2-\sqrt{2}}{x-7} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$E(x) = \frac{3}{x-7} \in \mathbb{Z} \text{ dacă } (x-7)|3, \text{ de unde } x-7 \in \{-3; -1; 1; 3\} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

rezultă că $x \in \{4; 6; 8; 10\} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

PROBLEMA 2

Determinați numărul rațional a , știind că $\left(\frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}} \right) \cdot a + \sqrt{5}$ este număr rațional.

Soluție:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}} \right) \cdot a + \sqrt{5} = \frac{a}{\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}} + \frac{a}{\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}} + \sqrt{5} = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$= \frac{a}{|\sqrt{5}+2|} + \frac{a}{|\sqrt{5}-2|} + \sqrt{5} = \frac{a}{\sqrt{5}+2} + \frac{a}{\sqrt{5}-2} + \sqrt{5} = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$= a(\sqrt{5}-2) + a(\sqrt{5}+2) + \sqrt{5} = (2a+1)\sqrt{5} \text{ este număr rațional} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

unde a număr rațional dacă $2a+1=0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

atunci $a = -\frac{1}{2}$ număr rațional.1 punct

PROBLEMA 3

a) Demonstrați că $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}, \forall n, k \in \mathbb{N}$

b) Se dau numerele:

$$a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30} \text{ și } b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018.$$

Arătați că numărul $I = \sqrt{15a + \frac{b}{1002}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Soluție:

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{n+k-n}{n(n+k)} = \frac{k}{n \cdot (n+k)}, \forall n, k \in \mathbb{N}$ 2 puncte

$$\begin{aligned} \text{b) } a &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{23} - \frac{1}{30} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15} \text{1 punct} \end{aligned}$$

$$b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018 = 3 + (5 \cdot 1 + 3) + (5 \cdot 2 + 3) + \dots + (5 \cdot 2003 + 3) \text{1 punct}$$

$$3 \cdot 2004 + 5 \cdot (1 + 2 + \dots + 2003) = 1002 \cdot 10021 \text{1 punct}$$

$$15a + \frac{b}{1002} = 10028 \text{ care nu este pătrat perfect1 punct}$$

$$\text{Atunci } I = \sqrt{15a + \frac{b}{1002}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{1 punct}$$

PROBLEMA 4

Fie ABC un triunghi oarecare. Poate fi împărțit acest triunghi în 16384 de triunghiuri congruente? Justificați.

Soluție:

Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA , respectiv AB din $\triangle ABC$ 1 punct

Obținem $\triangle APN \equiv \triangle BPM \equiv \triangle CMN \equiv \triangle PMN$, conform cazului L.L.L.2 puncte

Prin același procedeu fiecare din cele 4 triunghiuri se vor împărți fiecare în câte alte 4 triunghiuri congruente, se obțin 4^2 triunghiuri congruente1 punct

În continuare fiecare din cele 4^2 triunghiuri congruente se va împărți în câte 4 triunghiuri congruente, rezultă 4^3 triunghiuri congruente1 punct

Procedeeul se continuă, până obținem $4^7 = 16384$ triunghiuri congruente2 puncte



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală, 14 februarie 2014

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare și notare

PROBLEMA 1

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = b - 1$ și $b \in [1; 3]$. Să se arate că:

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = 2\sqrt{2}.$$

Soluție:

Avem:

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2b + 1} + \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13} = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\sqrt{a^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2} =$$

$$\sqrt{a^2 + a^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{2a^2} + \sqrt{2(a-2)^2} = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$|a|\sqrt{2} + |a-2|\sqrt{2} = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$(|b-1| + |b-3|)\sqrt{2} = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$(b-1+3-b)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

PROBLEMA 2

a) Pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $ABEF$ sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $AB=40$ cm, $BE=30$ cm, aflați $d(D, EF)$ și $d(E, AC)$.

b) Cubul $OLEMPICS$ are lungimea muchiei $OP=6$ cm.

Calculați: i) lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic format alăturând două astfel de cuburi;

ii) $d(M, (PLC))$;

iii) $m(\angle(OC, (OLE)))$.

(Gazeta Matematică nr.1/2011-Suplimentul cu exerciții)

Soluție:

a) Figura:0,50 puncte

$$\left. \begin{array}{l} DA \perp (ABE) \\ \text{Din } EF \subset (ABE) \\ AF \perp FE \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3P} DF \perp FE \Rightarrow d(D, EF) = DF = 50\text{cm} \dots\dots\dots 1,50 \text{ puncte}$$

Din

$$\left. \begin{array}{l} EB \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow EO \perp AC \Rightarrow d(E, AC) = EO = 10\sqrt{17} \text{ cm} \dots\dots\dots 1,50 \text{ puncte}$$

T_3P

b) Figura:0,50 puncte

i) $d = 6\sqrt{6} \text{ cm}$ 1 punct

ii) $d(M, (PLC))$ este înălțimea tetraedrului MPLC0,50 puncte,

$d(M, (PLC)) = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ 0,50 puncte

iii) În $\triangle OEC$ dr, $m(\angle E) = 90^\circ$, (0,50 p), $\sin(\angle(OC, (OLE))) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 punct

PROBLEMA 3

Fie $E(x,y) = 2013x - 2014y - 1$

a) Dacă $x \in [-1; 1]$ și $y \in [-2; -1]$ arătați că $E(x; y) \geq 0$;

b) Determinați numărul divizorilor maximului lui $E(x,y)$.

Soluție:

a) $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2013 \leq 2013x \leq 2013$ 1 punct

$-2 \leq y \leq -1 \Rightarrow 2014 \leq -2014y \leq 4028$ 1 punct

Adunând aceste relații obținem $1 \leq 2014x - 2015y \leq 6041$ 1 punct

Iar scăzând din fiecare membru -1 și obținem : $0 \leq E(x; y) \leq 6040$1 punct

b) max. $E(x; y) = 6040 = 2^3 \cdot 5 \cdot 151$ 1 punct

Demonstrația că 151 este număr prim1 punct

Numărul divizorilor este $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divizori1 punct

PROBLEMA 4

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ respectiv $\triangle ABD$.

a) Arătați că planul $(G_1G_2G_3)$ este paralel cu planul (ABC) ;

b) Demonstrați că dreptele AG_1 , BG_2 și CG_3 sunt concurente.

Soluție:

a) Fie (BM),(AM) si (BN) mediane in $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ respectiv $\triangle ABD$ iar G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ respectiv $\triangle ABD$. Atunci G_1, G_2, G_3 apartin segmentelor (BM),(AM) si (BN)1 punct

Cum $BG_1/BM=2/3$, $AG_2/AM=2/3 \Rightarrow BG_1/BM= AG_2/AM \Rightarrow$ (r.t.Thales in $\triangle AMB$) G_1G_2

$G_1G_2 \parallel AB$. Dar $AB \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC)$ (1)1 punct

$BG_1/BM= BG_3/BN(=2/3) \Rightarrow$ (r.t.Thales in $\triangle BMN$) $G_1G_3 \parallel MN$ dar (MN) linie mijlocie in $\triangle ACD \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow G_1G_3 \parallel AC$ dar $AC \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_3 \parallel (ABC)$ 1 punct

dar G_1G_3, G_1G_2 sunt drepte concurente din planul($G_1 G_2 G_3$) $\Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$ 1 punct

b) In $\triangle AMB$, $AG_1 \cap BG_2 = \{P\}$, $G_2P/PB=1/3$. Presupunem ca, $CG_3 \cap BG_2 = \{P'\}$ 1 punct

In $\triangle CNB$ $G_2P'/P'B=1/3 \Rightarrow$ exista doua puncte in interiorul (BG₂) care il impart in raportul 1/3 absurd.1 punct

Deci presupunerea facuta este falsa $\Rightarrow AG_1, BG_2$ si CG_3 concurente in P astfel incat

$G_2P/PB=1/3$1 punct