



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapă locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA a X a

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- a) Să se arate că funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$, este strict crescătoare pe intervalul $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.
- b) Să se rezolve ecuația $\sqrt{x-2017} + \sqrt{y-2017} + \sqrt{2018-x} + \sqrt{2018-y} = 2\sqrt{2}$.

Problema 2.

- a) Să se rezolve ecuația: $(x+1)^{\log_2(x-3)} + 2 \cdot (x-3)^{\log_2(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$
- b) Să se arate că $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq a + b + c, \forall a, b, c \in (1, \infty)$.

Problema 3. Fie $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

- a) Arătați că $z \in A$ dacă și numai dacă $\frac{2z-i}{2+iz} \in A$.
- b) Dacă $(1+z) \in A$ și $(1+z^2) \in A$, arătați că $z \in A$.

Problema 4.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, două câte două distincte, astfel încât $z_1 \cdot \overline{z_2} = z_2 \cdot \overline{z_3} = z_3 \cdot \overline{z_1}$. Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixeale vârfurilor unui triunghi echilateral.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

