



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapa locală, SĂLAJ, 11.02.2023

X. osztály

1. Feladat

(7p) Tudva, hogy $a, b, c \in (1, \infty)$, igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_a \frac{b+c}{2} \cdot \log_b \frac{a+c}{2} \cdot \log_c \frac{a+b}{2} \geq 1.$$

2. Feladat

(3p) a) Legyenek A, B, C a sík pontjai, affixumaik $z_A = 1, z_B = \varepsilon, z_C = \varepsilon^2$, ahol $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.
Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

(4p) b) Tekintsd az $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ pontokat a síkban, ahol z_1, z_2, z_3 egyenlő modulusu komplex számok és $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

3. Feladat

Legyen $f: (0,1) \rightarrow (2, \infty), f(x) = x + \frac{1}{x}$ és $g: (0,1) \rightarrow (4, \infty), g(x) = x + \frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}}$ két függvény.

A g függvény bijektív.

(4p) a) Bizonyítsd be, hogy az f függvény bijektív!

(3p) b) Számítsd ki $g^{-1}\left(\frac{34}{3}\right)$ értékét!

4. Feladat

(7p) Számítsd ki a $\sum_{k=1}^n \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2 + 2k}{k^2 + 2k + 1}$ összeget!

Munkaidő: 3 óra.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.