

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a X-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Fie $a, b, c \in (1, \infty)$, $t = \frac{a^2}{2b+c} + \frac{b^2}{2c+a} + \frac{c^2}{2a+b}$. Arătați că $\log_a t + \log_b t + \log_c t \geq 3$.

(Autor prof. Ilonța Andrei, Colegiul Național „Sylvania” Zalău)

Soluție

Folosim inegalitatea $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$

Atunci obținem $t \geq \frac{(a+b+c)^2}{2b+c+2c+a+2a+b} \Rightarrow t \geq \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow t \geq \sqrt[3]{abc}$ 2 puncte

Deoarece $a \in (1, \infty)$, avem $\log_a t \geq \log_a \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \log_a t \geq \frac{1}{3} \log_a abc$ 2 puncte

Analog se scriu inegalitățile pentru ceilalți doi logaritmi și prin sumare obținem

$$S = \log_a t + \log_b t + \log_c t \geq \frac{1}{3} (\log_a abc + \log_b abc + \log_c abc)$$

$$S \geq \frac{1}{3} (3 + \log_a b + \log_b a + \log_b c + \log_c b + \log_c a + \log_a c + \log_c a) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Aplicând inegalitatea $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x > 0$, obținem $S \geq \frac{1}{3} (3 + 2 + 2 + 2) \Rightarrow S \geq 3$ 1 punct

PROBLEMA 2

Arătați că $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[27]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[3^n]{2} < \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(Selectată de prof. Opriș Adonia, Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian” Zalău)

Soluție

Inegalitatea din enunț devine $2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}} < 2^{\frac{1}{2}}$ 2 puncte