



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA A XII-A

Problema 1.

a) **Calculați:** $I = \int \frac{x^2 \sin x + 2x \cos x + \sin x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx;$

b) **Calculați:** $J = \int \frac{3x^5 - 4x^3 + x}{(x^3 - x + 1)^{2018}} dx, x \in (0, \infty).$

Soluție și barem

a) $I = -\int \left(\frac{\cos x}{x^2 + 1} \right)' dx = -\frac{\cos x}{x^2 + 1} + C \dots\dots\dots 2p$

b) $J = \int \frac{(x^3 - x + 1)(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1)}{(x^3 - x + 1)^{2018}} dx \dots\dots\dots 2p$

$J = -\frac{1}{2016(x^3 - x + 1)^{2016}} + \frac{1}{2017(x^3 - x + 1)^{2017}} + C \dots\dots\dots 3p$

Problema 2.

Fie $G = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z & x+z \end{pmatrix}, A^{-1} = A^t \right\}$. Să se demonstreze că $(G, \cdot)$ este grup, izomorf cu

grupul lui Klein. (Cu A^{-1} este notată inversa matricei A , cu A^t este notată transpusa matricei A).

Soluție și barem

$A^{-1} = A^t$ implică $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_2) = 1 = \det(A) \det(A^t) = (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \dots\dots\dots 1p$

Dacă $\det(A) = 1 \Rightarrow A^t = A^{-1} = A^*$, deci $\begin{pmatrix} x+y & z \\ y & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & -y \\ -z & x+y \end{pmatrix}$, de unde avem

$y = z, y = -z \Rightarrow y = z = 0, x = \pm 1 \Rightarrow A = \pm I_2 \dots\dots\dots 2p$

Dacă $\det(A) = -1 \Rightarrow A^t = A^{-1} = -A^*$, deci $\begin{pmatrix} x+y & z \\ y & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-z & y \\ z & -x-y \end{pmatrix}$, de unde avem

$y = z, x + y = -x - z \Rightarrow y = z, x = \pm 1 \Rightarrow A = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$

$G = \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ este grup izomorf cu grupul lui Klein.....2p



Problema 3.

Fie $A = \{ f / f : M \rightarrow M / f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in M \}$, unde $(M, \cdot)$ este un monoid comutativ finit cu elementul neutru e . Dacă pentru orice $f \in A$, avem $f(e) = e$, să se demonstreze că $(M, \cdot)$ este grup.

Dinu Șerbănescu, Gazeta Matematică

Soluție și barem

Pentru orice $a \in M \Rightarrow a, a^2, \dots, a^n, \dots \in M$, dar M este finită deci există i, j , cu $1 \leq i \leq |M|, a^i = a^j$ 2p

Fie $n = j - i$, avem după amplificări succesive cu $a^n: a^i = a^{i+n} = a^{i+2n} = \dots = a^{i+2ni} \Rightarrow a^{2ni} = a^{4ni}$ 1p

Funcția $f : M \rightarrow M, f(x) = bx, b = a^{2ni}$, are proprietatea $f(xy) = f(x)f(y) \Rightarrow f \in A \Rightarrow f(e) = e$ 2p

Astfel $a^{2ni} = b = e$, deci a este inversabil. Cum a este ales arbitrar din M , rezultă concluzia.....2p

Problema 4.

a) Există funcții continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea :

$$f(x) + \int_0^1 (x^2 - z - 1) f(z) dz = x^2 - x + 1, \text{ pentru orice } x \in [0, 1] ?$$

b) Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe $[0, 1]$, cu derivata continuă, care are proprietatea:

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Să se demonstreze: $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 105$.

Soluție și barem

a) $f(x) = \left(1 - \int_0^1 f(z) dz \right) x^2 - x + 1 + \int_0^1 (z+1) f(z) dz$ (1), deci $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, x \in [0, 1]$...2p

Înlocuind în (1) obținem $a = 11, b = -1, c = -\frac{79}{6}, f(x) = 11x^2 - x - \frac{79}{6}, x \in [0, 1]$ 1p

b) $\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) f'(x) dx = - \int_0^1 (3x^2 - 4x + 1) f(x) dx = -3 \int_0^1 x^2 f(x) dx + 4 \int_0^1 x f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = -1$ 2p

$\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)^2 dx = \frac{1}{105}$ 1p

$$(-1)^2 = \left(\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{105} \int_0^1 (f'(x))^2 dx \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 105$$

..1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

