

Olimpiada de matematică
Etapă locală, 28.02.2015
Clasa a XI-a

Subiecte:

1. Fie $A = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ -1 & -m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}^*$.

- a) Arătați că matricea $I_2 + A$ este inversabilă și inversa ei este $I_2 - A$.
b) Arătați că nu există matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^3 = A$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația $A^2 + A + I_2 = O_2$.

- a) Să se găsească o matrice care verifică relația din enunț.
b) Să se calculeze determinantul matricei A .

3. Se dau șirurile $(x_n)_{n \geq 1}, (a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$, unde

$$x_n = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)}, a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$b_n = \left(\frac{a_n}{12}\right)^n. \text{ Să se determine limitele celor trei șiruri.}$$

4. Se consideră $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică neconstantă de numere naturale nenule, de rație r și se notează

$$b_n = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(a_1 x) + \sin(a_2 x) + \dots + \sin(a_k x)}{\operatorname{tg}(1 \cdot x) + \operatorname{tg}(3 \cdot x) + \dots + \operatorname{tg}((2k-1) \cdot x)}.$$

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \frac{r}{2}.$$

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*