



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a XII - a

Problema 1 Fie $M = \{a, b, c, d\}$ și operația $*$: $M \times M \rightarrow M$ o lege de compoziție internă pe M , astfel încât este asociativă și admite element neutru.

- a) Arătați că dacă pentru orice element $x \in M$ există $y \in M$ astfel încât $x * y = e$, atunci acest y este unic. Demonstrați că x are un invers în M .
- b) Considerăm tabelul parțial al operației :

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	?	?
c	c	?	a	?
d	d	?	?	e

Completați tabelul astfel încât să definească o structură de grup.

Problema 2 Se consideră mulțimile $H = \{a^2 | a \in \mathbb{Z}_7\}$ și $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0} \right\}$.

- a) Să se determine elementele mulțimii H .
- b) Fie $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$. Să se arate că $x = y = \hat{0}$.
- c) Să se arate că G este un grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricilor.

Problema 3 Să se calculeze $\int \frac{12x+11}{(x+1) \cdot (2x+3) \cdot (3x+1) \cdot (6x+5) + 2026} dx$, $x \in (0, +\infty)$

Problema 4 a) Fie $a, b > 0$. Calculați $\int_{-1}^1 \frac{1-a^x b^x}{a^x + b^x} dx$.

b) Fie $a, b > 0$. Determinați $\int_{-1}^1 \frac{a^{2x} + b^{2x} + 2}{a^x + b^x} dx$.

G.M. NR. 4/2024

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru : 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.