

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f: N^* \rightarrow R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall n \in N^*$$

Soluție.

Pentru $n=1$ relația devine $f(2) = 1 + f(1)$. (1 punct)

Pentru $n=2$ relația devine $f(1) + 2f(2) = f(3) - 1 \Leftrightarrow f(3) = 3(1 + f(1))$. (1 punct)

Pentru $n=3$ relația dată conduce la $f(4) = 12 \cdot (1 + f(1))$. (1 punct)

Prin inducție se arată că $f(n) = \frac{n!}{2}(1 + f(1))$, pentru orice $n \geq 2$. (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)
(3 puncte)

Notând $f(1)=a$, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt:

$$f: N^* \rightarrow R, f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n \geq 2 \end{cases} \quad (1 \text{ punct })$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{x^2 + 31x} + \sqrt{x + 31} = x + \sqrt{x} + 8$$

Soluție:

$$\sqrt{x(x + 31)} + \sqrt{x + 31} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 8$$

$$\sqrt{x + 31} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 8$$

$$(\sqrt{x} + 1) (\sqrt{x + 31} - \sqrt{x}) = 8 \quad 2p$$

$$\text{notăm } a = \sqrt{x + 31} \text{ și } b = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} (b + 1)(a - b) = 8 \\ a^2 - b^2 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b + 1)(a - b) = 8 \\ (a - b)(a + b) = 31 \end{cases} \quad 2p$$

$$\text{dar } a \neq b \Rightarrow \frac{b + 1}{a + b} = \frac{8}{31} \Leftrightarrow a = \frac{23b + 31}{8} \Rightarrow 15b^2 + 46b - 33 = 0 \quad 2p$$

$$b_1 = -\frac{11}{3}, \quad b_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{25} \quad 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 3.

Fie rombul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține dreptei AC dacă și numai dacă $AM + DP = BN$.

Soluție:

Fie R mijlocul lui $[NP]$ iar $MR \cap AC = \{G\}$

Considerăm $\frac{MG}{GR} = k, AB = a, \dots\dots\dots 1p$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AM} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AR} = \frac{1}{1+k} \frac{AM}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k} \frac{1}{2} (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \frac{1}{1+k} \frac{AM}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) + \frac{k}{2(1+k)} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{AM}{(1+k)a} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)} \frac{BN}{a} \overrightarrow{BC} + \frac{k}{2(1+k)} \overrightarrow{AD} + \frac{k}{2(1+k)} \frac{DP}{a} \overrightarrow{DC} \\ &= \left(\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)} \right) \cdot \overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 2p\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC} \text{ coliniari} \Leftrightarrow \frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}$$

$$\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)}$$

$$AM + \frac{k}{2} DP = \frac{k}{2} BN \quad (*) \dots\dots\dots 3p$$

$$G \text{ centru de greutate} \Leftrightarrow k = 2 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} AM + DP = BN \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.

a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.

b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Barem

a)

$$\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} + \frac{y-z}{yz+(x+y+z)x} + \frac{z-x}{zx+(x+y+z)y} = \frac{x-y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y-z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)} = \frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(y+z)(x+z)} = 0. \dots\dots\dots 3p$$

$$b) \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{y}{xy+2z} + \frac{z}{yz+2x} + \frac{x}{zx+2y} \Rightarrow \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y+z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z+x}{(x+y)(y+z)} \right) (1) \dots\dots\dots 1p$$

Notăm. $x + y = a, y + z = b, z + x = c, a, b, c > 0$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{4} (3) \dots\dots\dots 1p$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;