

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Se consideră mulțimea $H = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0, A^{-1} = A^2 + A\}$.

a) Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in H$.

b) Să se arate că dacă $A \in H$ și $P \in M_3(\mathbb{R})$ este o matrice inversabilă, atunci $P^{-1} \cdot A \cdot P \in H$.

c) Să se arate că mulțimea H conține cel puțin 2023 elemente.

* * *

SUBIECTUL 2

a) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $\text{Tr}(A) = 0$ dacă și numai dacă $\det(A - I_2) = \det(A + I_2)$.

b) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A^k - I_2) = \det(A^k + I_2)$ pentru $k \in \{2021, 2022\}$. Demonstrați că $A^2 = O_2$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

SUBIECTUL 3

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot \sqrt{n}}{x_n^2 + \sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent către zero;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 \cdot \sqrt{n}) = \frac{1}{4}$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL 4

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale definit prin $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = |x_n - x_{n-1}|$, $\forall n \geq 1$.

a) Să se arate că dacă $x_0 = 0$ și $x_1 = 1$, atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent.

b) Fie $y_n = \max\{x_n, x_{n-1}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $(y_n)_{n \geq 1}$ este convergent, oricare ar fi $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.

*Nelu Chichirim***Notă:**

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.