

10

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a X – a

SUBIECTE:

1. a) Arătați că: $\operatorname{Re} z = \frac{a}{4} \left(\left| z + \frac{1}{a} \right|^2 - \left| \bar{z} - \frac{1}{a} \right|^2 \right), \forall z \in \mathbb{C}, \forall a \in \mathbb{R}^*$ (3p)
b) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că:
 $2(6 + 9i)^n - 3(1 + 8i)^n = 3(7 + 4i)^n \Leftrightarrow (2 + i)^n + (2 - i)^n = 2 \cdot 3^{n-1}$ (4p)
2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, o progresie aritmetică cu termeni pozitivi.
a) Demonstrați că: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2p)
b) Fie $(b_n)_{n \geq 1}$, o progresie geometrică cu termeni mai mari decât 1. Demonstrați că:
 $\lg \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (5p)
3. Se consideră funcția $f: (-\infty, 0] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
a) Arătați că funcția f este strict monotonă. (2p)
b) Arătați că f este inversabilă și determinați inversa ei. (2p)
c) Arătați că $f(x-1) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) > f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in (-\infty, -1)$. (3p)
4. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe diferite două câte două, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Să se demonstreze că:
 $\min_{a \in \mathbb{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{1}{2r} |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|$ (7p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.