

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 18 februarie 2018

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Fie mulțimea $G = \{A \in M_2(\mathbb{C}) / \det(A) = 1\}$.

a) (4p) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup ("·" este operația de înmulțire a matricelor).

b) (3p) Arătați că grupul $(G, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

* * *

Soluție: a) $\forall A, B \in G$ avem $\det(A) = \det(B) = 1$; atunci $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1$, adică $AB \in G$.

Înmulțirea matricelor în $M_2(\mathbb{C})$ este asociativă. Cum $G \subset M_2(\mathbb{C})$ rezultă că "·" este asociativă pe G .

Cum $\det(I_2) = 1$ rezultă că $I_2 \in G$, deci I_2 este element neutru în $(G, \cdot)$.

Pentru orice $A \in G$ avem $\det(A) = 1 \neq 0$, deci A este inversabilă. Cum $AA^{-1} = I_2$, trecând la determinanți obținem $\det(A^{-1}) = 1$, adică $A^{-1} \in G$. În concluzie $(G, \cdot)$ este grup.

b) Prin reducere la absurd presupunem că $(G, \cdot) \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Deoarece $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este grup abelian, rezultă că $(G, \cdot)$ este și el grup abelian.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $A, B \in G$ și $AB \neq BA$, deci grupul G nu este comutativ, absurd!

Barem.

a) $\forall A, B \in G \Rightarrow AB \in G$	1 p
Asociativitate	1 p
Element neutru	1 p
Toate elementele din G sunt inversabile	1 p
b) Dacă $(G, \cdot) \cong (\mathbb{C}^*, \cdot) \Rightarrow (G, \cdot)$ grup abelian	2 p
Finalizare	1 p

2. (7p) Fie n un număr natural cu $2 \leq n \leq 1008$ și $(S_n, \cdot)$ grupul permutărilor de ordinul n .

Dacă $\sigma \in S_n$ și $\sigma^{2018} = e$, demonstrați că $\sigma^2 = e$.

Am notat cu e permutarea identică din S_n , $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Vladimir Cerbu

Soluție. Deoarece $\text{ord}(\sigma) / \text{ord}(S_n, \cdot)$ și $\text{ord}(S_n, \cdot) = n! \Rightarrow \text{ord}(\sigma) / n!$.

Dar din ipoteză avem $\sigma^{2018} = e \Rightarrow \text{ord}(\sigma) / 2018$.

Deducem că $\text{ord}(\sigma) / \text{c.m.m.d.c.}(2018, n!)$. Cum $2 \leq n \leq 1008$, $2018 = 2 \cdot 1009$, iar 1009 este număr prim deducem că $\text{c.m.m.d.c.}(2018, n!) = 2$, deci $\text{ord}(\sigma) \in \{1, 2\}$ ceea ce implică $\sigma^2 = e$.

Barem.

$\text{ord}(\sigma)/\text{ord}(S_n, \cdot)$ și $\text{ord}(S_n, \cdot) = n! \Rightarrow \text{ord}(\sigma)/n!$	2 p
$\sigma^{2018} = e \Rightarrow \text{ord}(\sigma)/2018$	2 p
$\text{ord}(\sigma)/\text{c.m.m.d.c.}(2018, n!)$	1 p
Finalizare	2 p

3. Fie M mulțimea tuturor funcțiilor continue $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

a) (4p) Pentru fiecare $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ considerăm funcția $f_\lambda: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda x - \frac{\lambda}{2}}$.

Arătați că $f_\lambda \in M$.

b) (3p) Determinați valoarea maximă a expresiei $\int_0^1 f^2(x) dx$ atunci când $f \in M$.

Ion Bursuc

Soluție. a) Pentru orice $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ funcția f_λ este continuă (rezultatul unor operații de compunere și adunare a unor funcții continue). Folosind liniaritatea integralei definite putem scrie:

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f^2(x) - f(x)\right) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) dx = 0 \quad (1)$$

Deoarece $\left(f_\lambda(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \lambda x - \frac{\lambda}{2}$ și $\int_0^1 \left(\lambda x - \frac{\lambda}{2}\right) dx = \lambda \left(\frac{x^2 - x}{2}\right) \Big|_0^1 = 0$, rezultă că $f_\lambda \in M$.

b) Dacă $f \in M$, atunci din relația (1) deducem că $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}$.

Folosind inegalitatea $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ obținem:

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dx \leq 2 \int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{4} dx = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Cum pentru funcția $f(x) = 1, (\forall) x \in [0,1]$ avem $f \in M$ și $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$, deducem că

$$\max_{f \in M} \int_0^1 f^2(x) dx = 1.$$

Barem.

a) f_λ este continuă	1 p
$\int_0^1 \left(\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) dx = 0$	2 p
Finalizare	1 p
b) $f \in M \Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \leq 1$	2 p
Finalizare	1 p

4. (7p) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale nenule monoton convergent la zero. Dacă $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $f(x) \leq f(x + a_n)$, să se demonstreze că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Mihai Piticari, Dan Popescu

Soluție: Deoarece funcția f admite primitive, rezultă că funcția f are proprietatea lui Darboux. Cum $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale nenule monoton convergent la zero, deducem că $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sau $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru fixarea ideilor, considerăm $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $g_n(x) = \frac{1}{a_n}(F(x + a_n) - F(x)), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, unde $F \in \int f(x) dx, x \in \mathbb{R}$.

Atunci $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem $g_n'(x) = \frac{1}{a_n}(f(x + a_n) - f(x)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, adică toate funcțiile g_n sunt

crescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$ avem $g_n(x_1) \leq g_n(x_2)$, prin urmare

$f(x_1) = F'(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_2) = F'(x_2) = f(x_2)$, adică funcția f este crescătoare.

Dacă $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ se obține că funcția f este descrescătoare.

Astfel f este funcție monotonă și are proprietatea lui Darboux, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Barem.

f admite primitive $\Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux	1 p
$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sau $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1p
Demonstrează că f este funcție monotonă	3 p
Finalizare	2 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.