

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1

Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a, b, c \in G$ care au proprietatea că $a^k b^k = c^k$, pentru orice $k \in \{3, 4, 5\}$.

Demonstrați că $ab = c = ba$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

SUBIECTUL 2

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \int_0^x t \sin 2t dt$, respectiv

$$g(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt.$$

a) Demonstrați că funcția g este descrescătoare.

b) Arătați că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 11/2022

SUBIECTUL 3

Demonstrați că $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ nu este izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$, unde $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ este produs direct de grupuri.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL 4

a) Determinați primitivele funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot e^{-x}$.

b) Să se arate că există o infinitate de funcții nemonotone $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x) = f(x) - |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.