

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

CLASA A- VIII -A

Subiectul I.

Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{5} \text{ și } a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 5b^2 = 1\}$.
Demonstrați că :

- a) $(9+4\sqrt{5}) \in A$
- b) Dacă $x, y \in A$, $y = c + d\sqrt{5}$, $c, d \in \mathbb{Z}$ atunci $x \cdot y \in A$
- c) Dacă $\bar{x} = a - b\sqrt{5}$ și $\bar{y} = c - d\sqrt{5}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ atunci $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$

Subiectul II.

- a) Determinați valorile reale ale lui x și y pentru care $x^4 + 16y^4 = 16xy - 8$
- b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $\sqrt{9n^2 + 5n}$ este număr irațional.
- c) Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$. Arătați că

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

Subiectul III.

Se consideră punctele A, B, C, D , necoplanare, astfel încât

$(AC) \equiv (AD) \equiv (BC) \equiv (BD)$ și punctele E și F mijloacele lui (AB) respectiv (CD) .

- a) Calculați măsura unghiului dreptelor AB și CD .
- b) Dacă $AA' \perp (BCD)$, demonstrați că punctele B, A' și F sunt coliniare.
- c) Dacă G este piciorul perpendicularei din A pe bisectoarea unghiului $\angle ACD$, arătați că $EG \parallel (BCD)$.

Subiectul IV.

Fie cubul $ABCDEFGH$, în care $BG \cap FC = \{P\}$ și aria triunghiului DBP este egală cu $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

- a) Calculați lungimea muchiei cubului.
- b) Determinați $\text{tg } u^0$, unde u^0 este măsura unghiului dintre dreptele DP și EB .
- c) Calculați valoarea unei funcții trigonometrice pentru măsura unghiului determinat de planele (EDG) și (EBG) .

Nota:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect e notat de la 0 la 7 puncte.

Orice altă rezolvare care conduce la soluția problemei este acceptată.