



COLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapa locală - SĂLAJ - 11.02.2023

BAREM DE NOTARE

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie legea de compoziție $x \circ y = xy + 4(x + y) + 12$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, aflați ultimele două cifre ale numărului $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ n$.

Barem

Legea se aduce la forma $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$ 1punct

Demonstrăm că legea este asociativă adică

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ 1 punct

Prin inducție se arată că :

$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + 4)(x_2 + 4) \dots (x_n + 4) - 4$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ 2 puncte

Avem $x_1 \circ x_2 = (x_1 + 4)(x_2 + 4) - 4$

Din asociativitate rezultă $x_1 \circ x_2 \circ x_3 = (x_1 + 4)(x_2 + 4)(x_3 + 4) - 4$

Presupunem că $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k = (x_1 + 4)(x_2 + 4) \dots (x_k + 4) - 4$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

Demonstrăm $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_{k+1} = (x_1 + 4)(x_2 + 4) \dots (x_{k+1} + 4) - 4$

$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_{k+1} = (x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k) \circ x_{k+1} = [(x_1 + 4)(x_2 + 4) \dots (x_k + 4) - 4] \circ x_{k+1} =$

$= [(x_1 + 4)(x_2 + 4) \dots (x_k + 4) - 4 + 4] \circ (x_{k+1} + 4) - 4 = (x_1 + 4)(x_2 + 4) \dots (x_k + 4)(x_{k+1} + 4) - 4$

$\Rightarrow x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + 4)(x_2 + 4) \dots (x_n + 4) - 4$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Atunci $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ n = (1 + 4) \cdot (2 + 4) \cdot (3 + 4) \cdot \dots \cdot (n + 4) - 4 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n + 4) - 4$

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ atunci produsul $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n + 4)$ are cel puțin factorii 5, 6, 7, 8, 9, 101punct

$\Rightarrow U_2(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n+4)) = 00$ 1punct

Deci $U_2(5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n+4) - 4) = 96$ 1punct

Subiectul 2

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A_{a,b} = \begin{pmatrix} a + \hat{3}b & b \\ \hat{4}b & a + \hat{3}b \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z_6, \det(A) = \hat{1} \right\}$.

(5p) a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian de ordin patru, în care fiecare element al grupului coincide cu inversul său.

(2p) b) Determinați subgrupurile lui $(G, \cdot)$.

Barem

a) Din condiția $\det(A) = \hat{1}$ rezultă ecuația $a^2 + \hat{5}b^2 = \hat{1}$ în Z_6(1 punct)

cu soluțiile $(\hat{1}, \hat{0}), (\hat{2}, \hat{3}), (\hat{4}, \hat{3}), (\hat{5}, \hat{0})$ (1 puncte)

Se realizează tabla operației de înmulțire a matricelor pe G , se verifică proprietățile grupului și se demonstrează că fiecare element al grupului coincide cu inversul său(3 puncte)

b) G conține matricea unitate și trei matrice de ordin 2, prin urmare G este izomorf cu grupul lui Klein, având cele două subgrupuri improprii și alte 3 subgrupuri generate de elementele de ordin 2.....(2 puncte)

Subiectul 3

a) Avem $I(x) = \int \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+e^{-x}} dx = \int \frac{e^x(f(x)+f'(x))}{f(x) \cdot e^x + 1} dx$ 2 puncte

Folosind schimbarea de variabilă $f(x) \cdot e^x + 1 = t$ 1 punct

obținem $I(t) = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C$ și de aici $I(x) = \ln(f(x) \cdot e^x + 1) + C$ 1 punct

b) fie $f(x) = \sin x - \cos x > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem $f'(x) = \cos x + \sin x$ și $f(x) + f'(x) = 2\sin x$ 1 punct

Folosind rezultatul de la **a)** avem $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + e^x(\sin x - \cos x)) + C$ 2 puncte

Subiectul 4

Funcția f este continuă pe $(0, \frac{\pi}{2}]$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea funcției f în punctul $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} - \frac{1}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x}{\sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} - \frac{1}{3} \right), \text{ iar } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} + 1 \right) = 2 \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{2 \frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{1}{6}, \text{ rezultă că}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Având $f(0) = 0$, deducem că f este continuă în $x =$

0. Deci, f este continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$, de unde rezultă că f admite primitive pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ **3 puncte**

Remarcând că funcția $H(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x - \frac{x}{3}$ este o primitivă a funcției f pe $(0, \frac{\pi}{2}]$, rezultă că o primitivă F a funcției f pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ este de forma:

$$F(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x - \frac{x}{3} + b, & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R}). \quad \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

Pentru ca F să fie o primitivă a funcției f pe $[0, \frac{\pi}{2}]$, este necesar ca F să fie derivabilă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Evident, F este derivabilă pe $(0, \frac{\pi}{2}]$. Prin urmare, F este derivabilă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$

dacă este derivabilă și în $x=0$. Pentru a putea îndeplini această cerință,

este necesar ca F să fie continuă în $x = 0$, ceea ce impune ca $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} - \frac{x}{3} + b \right) = b$$

(căci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0$), iar $F(0) = a$, de unde rezultă că $b=a$.

$$\text{Rezultă că } F(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x - \frac{x}{3} + a, & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\text{Ținând seama că } F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} - \frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x}} \cos x - \frac{1}{3} = 0,$$

Remarcând și faptul că $F'(0) = f(0)$ și $F'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{3} = f(x)$, oricare ar fi $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$,

deducem că F este derivabilă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$. Rezultă că F sunt primitivele lui f . Pentru $a=0$, obținem o

primitivă a funcției f **2 puncte**