



Olimpiada națională de matematică, etapa locală, 2015
clasa a XI-a

1. Se dă mulțimea de matrice

$$M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \text{ astfel încât } X^k = O_2\}.$$

- a. Demonstrați că dacă $A \in M$, atunci $\det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2015}) = 1$.
b. Demonstrați că matricea I_2 nu se poate scrie ca sumă finită de matrice din M .

2. a. Demonstrați că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 nu poate fi egal cu permutarea identică din S_3 .

b. Demonstrați că există o infinitate de perechi de matrice (X, Y) din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea că $XY \neq YX$ și $X^2 = Y^2 = I_2$.

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit recurent astfel:

$$x_1 = 1 \text{ și } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{ax_n^{a-1}},$$

unde $a \in \mathbb{N} - \{0\}$.

a. Demonstrați că șirul are limită și calculați această limită.

b. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

c. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^a}{n}$.

4. Se dau numerele $a, b, c \in [0, \infty)$, astfel încât $a + b + c = 3$. Determinați valorile extreme ale expresiei $2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 7 puncte. Timp de lucru, trei ore.