OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA A V-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. a) Arătați că numărul $x=\left(3^{1+2+3+...+42}+2\cdot 3^{1+3+5+...+59}\right):29$ este cub perfect.

b) Arătați că numărul x poate să fie scris ca o sumă de patru pătrate perfecte distincte nenule.

2. Împărțind un număr natural la un alt număr natural obținem câtul 3. Să se afle cele două numere, știind că suma lor este 36.

3. Pe o masă sunt 9 cartonaşe. Pe fiecare cartonaş este scris unul dintre numerele 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 astfel încât nu există două cartonaşe cu acelaşi număr. Gigel şi Costel iau fiecare câte 4 dintre cele 9 cartonaşe. Aflaţi ce număr este pe cartonaşul rămas pe masă, ştiind că suma numerelor de pe cartonaşele luate de Gigel, este de 5 ori mai mare decât suma numerelor de pe cartonaşele luate de Costel.

4. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care numărul $A=\overline{ab}+2\cdot\overline{ba}+3a+4b$ este pătrat perfect.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA A VI-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. a) Aflați numerele $\overline{xyz}$ astfel încât $x + y + z = \frac{144}{xy}$.

b) Aflați numerele naturale x și y astfel încât $x \cdot y = 2019 + y - 2x$.

2. Determinați numerele prime p astfel încât $p^2 + 3^p + 1 = 37^{4^a}$, unde a este număr natural dat.

3. Fie $A_0, A_1, \ldots, A_n$ puncte situate în această ordine pe o dreaptă d astfel încât $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 2^2$, …, $A_{n-1}A_n = 2^{n-1}$.

a) Arătați că $A_0A_{2018} = 2^{2018} - 1$.

b) Aflați p astfel încât $A_0A_p = 1023$.

c) Dacă M este mijlocul lui A_2A_{12} și N este mijlocul lui $A_{12}A_{24}$, determinați MN.

4. Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle AOB$. În semiplanul determinat de OA care nu conține pe (OB se duc dreptele $OX \perp OA$ și $OY \perp OB$. Dacă (OE este bisectoarea $\sphericalangle XOB$, iar (OY este bisectoarea $\sphericalangle XOE$, arătați că (OA este bisectoarea $\sphericalangle BOE$ și aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

ISJ ARAD
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA A VII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. a) Arătați că numărul $a=2\cdot(1+2+...+2018)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2018\cdot 2019}\right)$ este pătrat perfect.

b) Care este soluția în $\mathbb{Q}$ a ecuației:

$$\left(\frac{1}{33}+\frac{1}{303}+...+\frac{1}{3\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}3}\right)\cdot x=\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{1\underbrace{00....0}_{n\ zerouri}1}.$$

2. Se consideră numărul $A=\sqrt{\overline{a,b(cd)}+\overline{b,c(da)}+\overline{c,d(ab)}+\overline{d,a(bc)}}$, unde a, b, c, d sunt cifre nenule diferite.

a) Demonstrați că $1\le 0,3\cdot A\le\sqrt{3}$.

b) Câte numere $\overline{abcd}$ sunt dacă $A\in Q$?

3. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește trapezul $BCEF$ cu $CE \parallel BF$ și $BF = EF$, astfel încât $[AE\cap[DF =\{B\}$. Fie M mijlocul laturii $[CE]$ și N punctul în care paralela prin E la AF intersectează latura $[BC]$.

a) Să se stabilească natura ΔACF.

b) Să se demonstreze că punctele A, M și N sunt coliniare.

4. În dreptunghiul $ABCD$ notăm cu E simetricul punctului B față de punctul A și cu F simetricul punctului A față de punctul D. Dacă $\{O\}=AC\cap BD$, $\{P\}=OE\cap AD$ și $\{Q\}=OF\cap CD$, demonstrați că $\frac{QD}{AB}+\frac{PD}{BC}=1$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018 –

CLASA A VIII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. a) Arătați că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\frac{1}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}$.

b) Arătați că suma $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100\cdot 99}\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)}<1.$

2. Să se arate că pentru orice x număr real avem

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x^2+4x+7}<2.$$

3. În tetraedrul $ABCD$ cu lungimile muchiilor AB, BC și CA proporționale cu numerele 3, 4 respectiv 5, se construiește M' simetricul lui M față de B, unde $M \in (CD)$. Arătați că $AM = AM'$ dacă și numai dacă $AB \perp (BCD)$.

4. În cubul $ABCD\,A'B'C'D'$ notăm M, N, P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[B'C']$ respectiv $[DD']$.

a) Să se demonstreze că $CMNP$ este piramidă triunghiulară regulată.

b) Să se determine sinusul unghiului format de dreapta CM și planul (MNP).

c) Să se determine sinusul unghiului format de planele (MNP) și (MNC).