



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA a IX-a

Bareme și soluții

Problema 1

1. Determinați numerele reale x , pentru care are loc egalitatea $\{x\} + \{2x\} = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$, unde $\{t\}$ reprezintă partea fracționară iar $\lfloor t \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real t .

Soluție:

Deoarece $\{x\} \in [0,1)$ și $\{2x\} \in [0,1)$, rezultă că $\{x\} + \{2x\} = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k \in [0,2)$, dar $k \in \mathbb{Z}$, se obțin pentru k valorile 0 și 12p

Pentru $k=0$, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow x \in [0,2)$ se obțin egalitățile $\{x\} = \{2x\} = 0$, adică $x \in \mathbb{Z}$, rezultă $x \in \{0,1\}$ 1p

Pentru $k=1$, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow x \in [2,4)$ se obține egalitatea $x - [x] + 2x - [2x] = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 + [x] + [2x]}{3}$

Dacă $x \in \left[2, \frac{5}{2}\right)$, atunci $[x] = 2, [2x] = 4$, rezultă $x = \frac{7}{3} \in \left[2, \frac{5}{2}\right)$ 1p

Dacă $x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$, atunci $[x] = 2, [2x] = 5$, rezultă $x = \frac{8}{3} \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$ 1p

Dacă $x \in \left[3, \frac{7}{2}\right)$, atunci $[x] = 3, [2x] = 6$, rezultă $x = \frac{10}{3} \in \left[3, \frac{7}{2}\right)$ 1p

Dacă $x \in \left[\frac{7}{2}, 4\right)$, atunci $[x] = 3, [2x] = 7$, rezultă $x = \frac{11}{3} \in \left[\frac{7}{2}, 4\right)$ 1p

Problema 2

a) Arătați că $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$ oricare ar fi $x, y \in (0, +\infty)$.

b) Dacă $a, b, c, d \in (0, +\infty)$, astfel încât $abcd = 1$, arătați că:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$



Soluție:

$$a) \quad \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+xy} = \frac{(1+2y+y^2)(1+xy) + (1+2x+x^2)(1+xy) - (1+2x+x^2)(1+2y+y^2)}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} \dots\dots 1p$$

$$\frac{(1+2y+y^2)(1+xy) + (1+2x+x^2)(1+xy) - (1+2x+x^2)(1+2y+y^2)}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} = \frac{x^3y + xy^3 - 2xy - x^2y^2 + 1}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} \dots\dots 1p$$

$$\frac{x^3y + xy^3 - 2xy - x^2y^2 + 1}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} = \frac{xy(x-y)^2 + (xy-1)^2}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)} \geq 0 \dots\dots 2p$$

$$b) \quad \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+cd} \dots\dots 2p$$

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+cd} = \frac{1}{1+\frac{1}{cd}} + \frac{1}{1+cd} = 1 \dots\dots 1p$$

Problema 3

Determinați numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, știind că

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție:

Pentru $n=1$ se obține $a_1^3 = a_1^2 \Leftrightarrow a_1^2(a_1 - 1) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 1$

Pentru $n=2$, știind că $a_1 = 1$, se obține $1 + a_2^3 = (1 + a_2)^2 \Leftrightarrow a_2(a_2 - 2)(a_2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a_2 = 2 \dots\dots 2p$

Se intuiește că $a_n = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și se demonstrează prin inducție matematică.....1p

$$P(n): a_n = n$$

$$P(1): a_1 = 1 (A)$$

Se presupune adevărate $P(1), P(2), \dots, P(k)$

Se demonstrează $P(k+1)$

Se utilizează sumele cunoscute $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \dots\dots 1p$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + a_{k+1}^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + k + a_{k+1})^2 \Leftrightarrow \frac{k^2(k+1)^2}{4} + a_{k+1}^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} + a_{k+1} \right)^2 \dots\dots 1p$$

$$a_{k+1}(a_{k+1} - k - 1)(a_{k+1} + k) = 0 \Leftrightarrow a_{k+1} = k + 1, \text{ finalizare} \dots\dots 2p$$

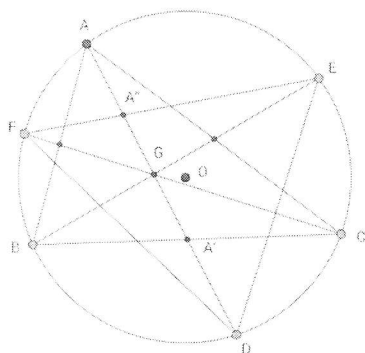


Problema 4

Considerăm $\triangle ABC$ și D, E, F intersecțiile medianelor din A, B , respectiv C cu cercul circumscris triunghiului. Arătați că dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, atunci :

- triunghiurile ABC și DEF au același centru de greutate;
- triunghiul ABC este echilateral.

Soluție:



- a) Fie O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Avem că

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} \dots\dots\dots 1p$$

și atunci relația din ipoteza devine $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$, deci dacă G și G' sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și DEF atunci vom avea că $3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OG'}$, deci $G = G'$ 2p

- b) Dacă A' și A'' sunt mijloacele segmentelor $[BC]$ și $[EF]$, atunci G, A' și A'' sunt coliniare....1p

Fie $\frac{GE}{GB} = \alpha$ și $\frac{GF}{GC} = \beta$, deci $\overrightarrow{GE} = \alpha \overrightarrow{BG}$ și $\overrightarrow{GF} = \beta \overrightarrow{CG}$.

Din $\overrightarrow{GA''} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \frac{1}{2}(\alpha \overrightarrow{BG} + \beta \overrightarrow{CG})$, $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ și $\overrightarrow{GA'} = \lambda \overrightarrow{GA''}$, rezultă că

$\alpha \cdot \lambda = \beta \cdot \lambda = -1$, deoarece vectorii $\overrightarrow{GB}$ și $\overrightarrow{GC}$ sunt liniar independenți, deci $\alpha = \beta$ 1p

Prin urmare $\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} \Rightarrow EF \parallel BC$, și cum $EFBC$ este patrulater inscriptibil va fi trapez isoscel sau dreptunghi, deci $GB = GC$ 1p

Analog $GA = GB = GC$, deci $G = O$, adică $\triangle ABC$ este echilateral.....1p



Olimpiada Națională de Matematică 2017 Etapă locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA A X-A

Problema 1.

Determinați numerele naturale n pentru care

$$\frac{1}{\sqrt{54^n}} + \frac{1}{\sqrt{27^n}} + \frac{1}{\sqrt{9^n}} + \frac{1}{\sqrt{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Gazeta Matematică 12/2016

Soluție și barem

Egalitatea din enunț se poate scrie sub forma $f(n) = 1$, unde $f(n) = \left(\frac{2}{54}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}, n \in \mathbb{N}$. (2p)

Observăm că $f(2) = 1$. (1p)

Dacă $n \in \{0, 1\}$, atunci $f(n) > f(2) = 1$. (2p)

Dacă $n \geq 3$, atunci $f(n) < f(2) = 1$, așadar singura valoare convenabilă a lui n este $n = 2$. (2p)

Problema 2.

Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \log_{\frac{1}{2}}(x-1).$$

Soluție și barem

Din condițiile de existență obținem că $x > 1$. (2p)

Cum membrul stâng este nenegativ, deducem că $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0$, de unde $x \leq 2$. (1p)

Pentru $x \in (1, 2]$ avem că $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$ și $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 1-\sqrt{x-1}$. (2p)

Ecuația devine $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 2$, cu soluția $x = \frac{5}{4}$. (2p)



Problema 3.

Spunem că o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este *remarcabilă* dacă $f(x^3) = f^2(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

- Arătați că există funcții remarcabile neconstante.
- Demonstrați că o funcție remarcabilă nu poate fi nici injectivă, nici surjectivă.

Soluție și barem

a) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ este remarcabilă. (3p)

b) Fie f o funcție remarcabilă. Avem că $f(0) = f^2(0)$, $f(1) = f^2(1)$ și $f(-1) = f^2(-1)$, prin urmare $f(0), f(1)$ și $f(-1)$ sunt elemente ale mulțimii $\{0, 1\}$. Rezultă că măcar două dintre aceste valori ale funcției sunt egale, deci f nu este injectivă. (2p)

Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = f\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right) = f^2\left(\sqrt[3]{x}\right) \geq 0$, așadar $\text{Im } f \subset [0, +\infty)$; deducem că funcția f nu este surjectivă. (2p)

Problema 4.

Dacă a este un număr complex, considerăm mulțimea

$$M_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |az + 1| = |z|\}.$$

Notăm cu $\mathcal{F}_a$ mulțimea imaginilor în planul complex ale tuturor elementelor lui M_a .

- Determinați $\mathcal{F}_0$ și $\mathcal{F}_1$.
- Demonstrați că $\mathcal{F}_a$ este o dreaptă sau un cerc.

Adrian Boțan

Soluție și barem

a) $M_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, deci $\mathcal{F}_0 = \mathcal{C}(O, 1)$. (1p)

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = |z|\}$, deci $\mathcal{F}_1$ este mediatoarea segmentului OA , unde $A(-1)$. (2p)

b) Dacă $|a| = 1$, avem: $|az + 1| = |z| \Leftrightarrow |a(z + \bar{a})| = |z| \Leftrightarrow |z - (-\bar{a})| = |z| \Leftrightarrow PA = PO$, unde $A(-\bar{a})$ și $P(z)$, prin urmare $\mathcal{F}_a$ este mediatoarea segmentului OA . (2p)

Dacă $|a| = k \notin \{0, 1\}$, avem: $|az + 1| = |z| \Leftrightarrow \left|a\left(z + \frac{1}{a}\right)\right| = |z| \Leftrightarrow k \left|z - \left(-\frac{\bar{a}}{k^2}\right)\right| = |z| \Leftrightarrow k \cdot PB = PO \Leftrightarrow \frac{PO}{PB} = k \neq 1$, unde $B\left(-\frac{\bar{a}}{k^2}\right)$ și $P(z)$, prin urmare $\mathcal{F}_a$ este un cerc având centrul pe dreapta OB (cercul lui Apollonius). În cazul $a = 0$, am văzut deja că $\mathcal{F}_0 = \mathcal{C}(O, 1)$. (2p)

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se vor puncta corespunzător.



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA a XI a

Barem

- 1) Determinați parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{ax^2 + bx + c} - 2x - 3) = 2017$

Soluție și barem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{ax^2 + bx + c} - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} - 2 - \frac{3}{x} \right) = \infty \cdot (\sqrt{a} - 2),$$

de unde obținem $a = 4$ 2p

Înlocuim și amplificăm cu conjugata, obținând astfel

$$b = 12$$
3p

$$\frac{c-9}{4} = 2017 \Rightarrow c = 8077$$
2p

- 2) a) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $|\lambda| < 1$ și considerăm șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$. Demonstrați că, dacă șirul

$(a_{n+1} - \lambda a_n)_{n \geq 1}$ este convergent la $l \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita

$$\text{egală cu } \frac{l}{1-\lambda}.$$

- b) Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$y_n = 9x_{n+2} - 12x_{n+1} + 4x_n, \forall n \geq 1, \text{ este convergent. Demonstrați că } (x_n)_{n \geq 1} \text{ este convergent.}$$

Soluție și barem:

- a) Considerăm șirul $y_n = a_{n+1} - \lambda a_n, n \geq 1$. Obținem:

$$y_1 = a_2 - \lambda a_1$$

$$y_2 = a_3 - \lambda a_2 \left| \cdot \frac{1}{\lambda} \right.$$

$$y_3 = a_4 - \lambda a_3 \left| \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right.$$

.....

$$y_n = a_{n+1} - \lambda a_n \left| \cdot \frac{1}{\lambda^{n-1}} \right. \text{ și adunând relațiile vom avea:}$$



$$y_1 + \frac{1}{\lambda} \cdot y_2 + \frac{1}{\lambda^2} \cdot y_3 + \dots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} \cdot y_n = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \cdot a_{n+1} - \lambda a_1 \dots \dots \dots 2p$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \lambda^n a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + \frac{1}{\lambda} \cdot y_2 + \frac{1}{\lambda^2} \cdot y_3 + \dots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} \cdot y_n}{\frac{1}{\lambda^{n-1}}} = \dots \dots \dots lp$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\lambda^n} \cdot y_{n+1}}{\frac{1}{\lambda^n} - \frac{1}{\lambda^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{1 - \lambda}, \text{ conform lemei Stolz-Cesaro}$$

$$\text{Așadar, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{n+1}}{1 - \lambda} + \lambda^n a_1 \right) = \frac{l}{1 - \lambda} \dots \dots \dots lp$$

b) Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$. Împărțind relația din ipoteză prin 9, obținem:

$$\frac{y_n}{9} = x_{n+2} - \frac{4}{3} x_{n+1} + \frac{4}{9} x_n = \left(x_{n+2} - \frac{2}{3} x_{n+1} \right) - \frac{2}{3} \left(x_{n+1} - \frac{2}{3} x_n \right) \dots \dots \dots lp$$

Notând $x_{n+1} - \frac{2}{3} x_n = z_n$, relația precedentă devine: $\frac{y_n}{9} = z_{n+1} - \frac{2}{3} z_n$, membrul stâng având

$$\text{limita egală cu } \frac{\alpha}{9}. \text{ Conform a), } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{\frac{\alpha}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\alpha}{3} \dots \dots \dots lp$$

$$\text{În concluzie, conform a), } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\frac{\alpha}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \alpha, \text{ deci}$$

șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.....lp

3) Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A^3 = AB^2 - BA^2$ și $B^3 = -I_n$. Arătați că:

a) Matricea $C = A^2 - B^2$ este inversabilă.

b) $A^3 B = BA^3$.

Soluție și barem:

Din ipoteză, $A^3 - AB^2 + BA^2 = O_n$, deci $A(A^2 - B^2) + B(A^2 - B^2) = -B^3 = I_n \dots \dots \dots 2p$

$(A + B) \cdot (A^2 - B^2) = I_n \Rightarrow C$ inversabilă.....lp

Deci $(A^2 - B^2) \cdot (A + B) = I_n \Rightarrow A^3 + A^2 B - B^2 A - B^3 = I_n \Rightarrow A^3 = B^2 A - A^2 B \dots \dots \dots lp$



$$A^3 = AB^2 - BA^2 \mid \cdot B \Rightarrow A^3 B = AB^3 - BA^2 B \dots\dots\dots 1p$$

$$B \mid \cdot A^3 = B^2 A - A^2 B \Rightarrow BA^3 = B^3 A - BA^2 B \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În concluzie, } A^3 B = -A - BA^2 B = BA^3 \dots\dots\dots 1p$$

4) Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ care îndeplinesc următoarele condiții:

$$(1) \det(A + 2016 \cdot B) = \det(2016 \cdot A + B) \quad \text{și}$$

$$(2) \det(A + 2017 \cdot B) = \det(2017 \cdot A + B)$$

Să se demonstreze că $\det A = \det B$.

Soluție și barem:

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \det(A + xB) - \det(xA + B)$, f - funcție de gradul al doilea.....2p

$$f(1) = \det(A + B) - \det(A + B) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$f(2016) = \det(A + 2016B) - \det(2016A + B) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$f(2017) = \det(A + 2017B) - \det(2017A + B) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Deci f are trei zeroruri și fiind funcție de gradul al doilea rezultă că $f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$1p

$$\text{În concluzie, } f(0) = 0, \text{ ceea ce conduce la } \det A = \det B \dots\dots\dots 1p$$

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA A XII-A

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ. Dacă $a \in G$, se definește funcția $f_a : G \rightarrow G$, $f_a(x) = axa^{-1}$.

a) Să se demonstreze că f_a este automorfism al grupului $(G, \cdot)$ pentru orice $a \in G$.

b) Să se demonstreze că mulțimea $\text{Int}(G) = \{f_a \mid a \in G\}$ este subgrup al grupului $(\text{Aut}(G), \circ)$.

Rezolvare și barem de notare

a) $f_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = f_a(x)f_a(y), \forall x, y \in G \Rightarrow f_a$ endomorfism1p

$f_a^{-1} = f_{a^{-1}} \Rightarrow f_a$ bijectivă, $\forall a \in G$ 1p

Finalizare f_a este automorfism al grupului $(G, \cdot)$ 1p

b) Dacă $a, b \in G \Rightarrow (f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = af_b(x)a^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} =$

$= (ab)x(b^{-1}a^{-1}) = (ab)x(ab)^{-1} = f_{ab}(x), \forall x \in G \Rightarrow f_a \circ f_b = f_{ab}, \forall a, b \in G$ 2p

$f_b^{-1} = f_{b^{-1}} \Rightarrow f_a \circ f_b^{-1} = f_a \circ f_{b^{-1}} = f_{ab^{-1}} \in \text{Int}(G), \forall a, b \in G$ 1p

Finalizare $(\text{Int}(G), \circ) \leq (\text{Aut}(G), \circ)$ 1p

2. Fie $(G, \cdot)$ un monoid comutativ, $p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q$ și $a \in G$ un element inversabil. Dacă ecuațiile $x^p = a$

și $x^q = a$ au soluții în G , să se arate că ecuația $x^n = a$ are soluție în G , unde $n = c.m.m.c.\{p, q\}$.

Rezolvare și barem de notare

Fie $y, z \in G$ soluții ale ecuațiilor date $\Rightarrow y^p = a$ și $z^q = a$

Cum a este inversabil $\Rightarrow y, z$ inversabile1p

$n = p\alpha = q\beta$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ și $(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow \exists v, s \in \mathbb{Z} : \alpha v + \beta s = 1$ 2p

$a = a^{\alpha v + \beta s} = (a^\alpha)^v \cdot (a^\beta)^s = (y^{p\alpha})^v \cdot (z^{q\beta})^s$ 2p

$a = (y^v)^n \cdot (z^s)^n = (y^v \cdot z^s)^n$ 1p

Finalizare ecuația $x^n = a$ are soluția $y^v \cdot z^s$ 1p

3. a) Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} \cdot \cos x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

admite proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.



b) O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, verifică relația:

$$f''(x) = 2f(x) \cdot f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculați $I = \int (f'(x))^2 \cdot f(x) dx$ în funcție de $f'(x)$.

Rezolvare și barem de notare

a) Considerăm funcțiile $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite astfel:

$$g(x) = \cos x \text{ și } h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

Funcția g este continuă pe $\mathbb{R}$, iar funcția h posedă primitive și este mărginită.1p

Prin urmare funcția produs $f = g \cdot h$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. În concluzie funcția f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ 2p

b) Avem:

$$I = \int (f'(x))^2 \cdot f(x) dx = \int f'(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) dx = \int f'(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot f''(x) dx = \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{2} \int f'(x) \cdot (f'(x))' dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} [(f'(x))^2]' dx = \frac{1}{4} (f'(x))^2 + C \dots\dots\dots 2p$$

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și numerele reale a și $b, a < b$, astfel încât:

$$\int_a^b f(a+b+t-x) dx \geq \int_a^b f(x) dx, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Demonstrați că } f(a) = f(b).$$

Rezolvare și barem de notare

Facem substituția: $a+b-x+t = y$, de unde rezultă că $dx = -dy$, iar limitele de integrare devin:

$$x = a \Rightarrow y = b+t \dots\dots\dots 2p$$

$$x = b \Rightarrow y = a+t$$

$$\int_a^b f(a+b+t-x) dx = - \int_{b+t}^{a+t} f(y) dy = \int_{a+t}^{b+t} f(y) dy \dots\dots\dots 1p$$

Fie funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = \int_{a+t}^{b+t} f(x) dx$. Deoarece funcția f este continuă (ipoteza), rezultă că F este

derivabilă și $F(t) \geq F(0), \forall t \in \mathbb{R}$1p

Prin urmare, 0 este punct de minim pentru funcției F și cum F este derivabilă pe mulțimea numerelor reale, rezultă că $F'(0) = 0$ (teorema lui Fermat).2p

Cum $F'(t) = f(b+t) - f(a+t) \Rightarrow f(a) = f(b)$ 1p