

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013

CLASA a VII-a
Bareme

Subiectul 1.

1. a) $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2014}$ 1p

$a + b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{2013}{2014} + \frac{1}{2014}\right) = 1 + 1 + \dots + 1 = 1007$ 2p

$\frac{a+b}{2} = \frac{1007}{2}$ 1p

b) $x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} = 1 + \sqrt{3}$ 2p

Obținem x este între 2 și 31p

Subiectul 2.

Se consideră $E(m; n) = \sqrt{3 \cdot 5^m + 25^n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $E(2013; 1006) \in \mathbb{Q}$ și $E(1006; 2013) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Arătați că există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $E(m; n) \in \mathbb{Q}$.

c) Arătați că există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $E(m; n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a) $E(2013; 1006) = \sqrt{3 \cdot 5^{2013} + 25^{1006}} = \sqrt{5^{2012} (3 \cdot 5 + 1)} = \sqrt{16 \cdot 5^{2012}} = 4 \cdot 5^{1006} \in \mathbb{Q}$1p.

$E(1006; 2013) = \sqrt{3 \cdot 5^{1006} + 25^{2013}} = \sqrt{5^{1006} (3 + 5^{3020})} = 5^{503} \sqrt{3 + 5^{3020}}$

$U(3 + 5^{3020}) = 8 \Rightarrow 3 + 5^{3020}$ nu este pătrat perfect deci $E(1006; 2013) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$...2p.

b) Considerând $m = 2n + 1$ obținem

$E(m; n) = \sqrt{3 \cdot 5^{2n+1} + 5^{2n}} = \sqrt{5^{2n} (3 \cdot 5 + 1)} = 5^n \cdot 4 \in \mathbb{Q}$.

Există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cu $m = 2n + 1$ 2p.

c) Fie $m = 2k < 2n, k \in \mathbb{N}$ și obținem $E(m; n) = \sqrt{5^{2k} (3 + 5^{2n-2k})} = 5^k \sqrt{3 + 5^{2n-2k}}$

$U(3 + 5^{2n-2k}) = 8 \Rightarrow 3 + 5^{2n-2k}$ nu este pătrat perfect.

Există o infinitate de perechi $(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cu $m = 2k < 2n, k \in \mathbb{N}$ 2p.

Subiectul 3

Fie patrulaterul ABCD cu $BD \cap AC = \{O\}$, O fiind mijlocul segmentului [BD]. Paralelele duse prin O la BC și CD intersectează pe AB și AD în punctele P și respectiv Q.

- Demonstrați că patrulaterul ABCD este paralelogram dacă și numai dacă $BD = 2PQ$.
- Arătați că, orice 4 numere naturale, nedivizibile cu 7, am pune în vârfurile patrulaterului, există întotdeauna cel puțin o latură sau o diagonală pentru care suma sau diferența numerelor de la capetele ei să fie un număr divizibil cu 7.

a.

“ $\Rightarrow$ ” ABCD paralelogram $\Rightarrow [AD] \equiv [BC]$.

În $\triangle ABC$ și $\triangle ADC$, [OP] și, respectiv [OQ] sunt linii mijlocii

$\Rightarrow$ în $\triangle ABD$, [QP] linie mijlocie $\Rightarrow BD = 2PQ$... 2p.

“ $\Leftarrow$ ” Aplicând teorema lui Thales în $\triangle ABC$ și $\triangle ADC$, avem:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AO}{OC}, \text{ respective } \frac{AQ}{QD} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QD} \Rightarrow PQ \parallel BD. \quad \dots 1p.$$

Cum $BD = 2PQ \Rightarrow [PQ]$ linie mijlocie $\Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QD} = \frac{AO}{OC} = 1 \Rightarrow [AO] \equiv [OC]$

Din $[BO] \equiv [OD]$ și $[AO] \equiv [OC] \Rightarrow ABCD$ paralelogram ... 1p.

b.

Fiecare număr este legat de celelalte 3 numere ori prin latură, ori prin diagonală.

Considerăm:

A mulțimea ce conține numerele naturale de forma $7k+1$ și $7k+6$

B mulțimea ce conține numerele naturale de forma $7k+2$ și $7k+5$

C mulțimea ce conține numerele naturale de forma $7k+3$ și $7k+4$... 1p.

Fiind 4 numere (nedivizibile cu 7), există cel puțin 2 dintre ele care sunt din aceeași mulțime.

Dacă sunt de același tip atunci diferența lor este divizibilă cu 7, dacă nu atunci suma lor este divizibilă cu 7. ... 2p.

Subiectul 4

În trapezul dreptunghic ABCD, $AB \parallel CD$, $m(\angle A) = 90^\circ$, $AB = 2 DC$, diagonala BD intersectează înălțimea CE în punctul O. Dacă $M \in (OB)$, paralela prin O la AB intersectează dreapta CM în P, iar dreptele ME și AD se intersectează în N demonstrați că:

- triunghiul CEP este isoscel;
- semidreapta CE este bisectoarea unghiului NCM.

Prof. Ivan Ion și Mihai Ioan
Piatra Neamț

a) $\triangle OEB \equiv \triangle OCD$ 1p

OP mediatoarea segmentului CE 1p

Finalizare $\triangle MCD$: $OP \parallel DC \Rightarrow \frac{MO}{OD} = \frac{MP}{PC}$ 1p

$\triangle MDN$: $OE \parallel DN \Rightarrow \frac{OM}{OD} = \frac{ME}{EN}$ 1p

În $\triangle MCN$ din $\frac{MP}{PC} = \frac{ME}{EN} \Rightarrow PE \parallel CN$ 1p

$\angle PEC \equiv \angle ECN$, $\angle PEC \equiv \angle ECP$ și finalizare 1p