

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Fie $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2018}$
(3p) a) Arătați că a este divizibil cu 7.
(2p) b) Arătați că $a = 2^{2019} - 1$.
(1p) c) Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a+1}{2^{2018} \cdot x} \in \mathbb{N}$.

prof. Tamara Brutaru, Suceava

Soluție:

a) a are 2019 termeni. Cum $2019:3$ atunci putem grupa câte 3 termeni.

$$a = (2^0 + 2^1 + 2^2) + 2^3(1 + 2^1 + 2^2) + \dots + 2^{2016}(1 + 2^1 + 2^2)$$

$$a = 7 + 2^3 \cdot 7 + \dots + 2^{2016} \cdot 7$$

$$a = 7(1 + 2^3 + \dots + 2^{2016}) \Rightarrow a:7$$

b) $2a - a = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2019}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2018})$

$$\Rightarrow a = 2^{2019} - 2^0 \Rightarrow a = 2^{2019} - 1$$

c) Din b) avem $\frac{a+1}{2^{2018} \cdot x} = \frac{2^{2019}}{2^{2018} \cdot x} = \frac{2}{x}$. Cum $\frac{2}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{1, 2\}$

Barem:

a) a are 2019 termeni. Cum $2019:3$ atunci putem grupa câte 3 termeni $a = (2^0 + 2^1 + 2^2) + 2^3(1 + 2^1 + 2^2) + \dots + 2^{2016}(1 + 2^1 + 2^2)$	1p
$a = 7 + 2^3 \cdot 7 + \dots + 2^{2016} \cdot 7$	1p
$a = 7(1 + 2^3 + \dots + 2^{2016}) \Rightarrow a:7$	1p
b) $2a - a = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2019}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2018})$	1p
$\Rightarrow a = 2^{2019} - 2^0 \Rightarrow a = 2^{2019} - 1$	1p
c) $\frac{a+1}{2^{2018} \cdot x} = \frac{2^{2019}}{2^{2018} \cdot x} = \frac{2}{x}$	1 p
$\frac{2}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{1, 2\}$	1 p

2. **(7p)** Aflați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $\frac{a}{bc+1} + a = \overline{a, bc}$.

Gazeta Matematică Nr.3/2017

Soluție: $\frac{a}{bc+1} + a = \overline{a, bc} \Leftrightarrow \frac{a}{bc+1} = \overline{0, bc} \Leftrightarrow \frac{a}{bc+1} = \frac{\overline{bc}}{100} \Leftrightarrow 100 \cdot a = \overline{bc} \cdot (bc+1)$.

Cum a este cifră nenulă, iar ultimele două cifre a lui $100a$ sunt 0, atunci produsul numerelor consecutive $\overline{bc}$ și $\overline{bc} + 1$ va avea ultima cifră 0, deci $c \in \{0, 4, 5\}$.

Dacă $c = 0 \Rightarrow \overline{b0} \cdot \overline{b1}$ nu poate avea ultimele două cifre 0.

Dacă $c = 4 \Rightarrow \overline{b4} \cdot \overline{b5} \leq 900$, atunci $b=1$ sau $b=2$ și avem soluția $b=2$, de unde $a=6 \Rightarrow \overline{abc} = 624$.

Dacă $c = 5 \Rightarrow \overline{b5} \cdot \overline{b6} \leq 900$, atunci $b=1$ sau $b=2$, dar produsul nu are ultimele două cifre 0.

Barem:

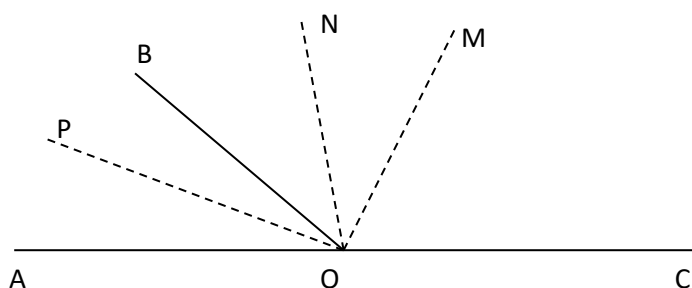
$\frac{a}{\overline{bc}+1} + a = \overline{a, bc} \Leftrightarrow \frac{a}{\overline{bc}+1} = \overline{0, bc} \Leftrightarrow \frac{a}{\overline{bc}+1} = \frac{\overline{bc}}{100} \Leftrightarrow 100 \cdot a = \overline{bc} \cdot (\overline{bc} + 1)$	2p
Cum a este cifră nenulă, iar ultimele două cifre a lui $100a$ sunt 0, atunci produsul numerelor consecutive $\overline{bc}$ și $\overline{bc} + 1$ va avea ultima cifră 0, deci $c \in \{0, 4, 5\}$.	2p
Analiza cazurilor $c \in \{0, 4, 5\}$	2p
Găsirea soluției $\overline{abc} = 624$	1p

3. Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente suplementare, iar semidreptele $[OM, [ON$ și $[OP$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle BOM$, respectiv $\sphericalangle AOB$. Se știe că $m(\sphericalangle AOP) = \frac{m(\sphericalangle NOC)}{6}$.

a) (5p) Să se calculeze măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

b) (2p) Să se demonstreze că unghiurile $\sphericalangle MOA$ și $\sphericalangle BON$ au aceeași bisectoare.

Prof. Gabriela Sascău, Rădăuți



Soluție:

a) $[OP$ bisectoarea $\sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle POB \Rightarrow$

$$m(\sphericalangle AOP) = m(\sphericalangle POB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} = x \Rightarrow$$

$$m(\sphericalangle AOB) = 2x.$$

$[ON$ bisectoarea $\sphericalangle BOM \Rightarrow \sphericalangle BON \equiv \sphericalangle NOM \Rightarrow m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle NOM) = \frac{m(\sphericalangle BOM)}{2} = y \Rightarrow$

$$m(\sphericalangle BOM) = 2y.$$

$[OM$

bisectoarea

$$\sphericalangle BOC \Rightarrow \sphericalangle BOM \equiv \sphericalangle MOC \Rightarrow m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle MOC) = \frac{m(\sphericalangle BOC)}{2} = 2y \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 4y.$$

Din ipoteză $m(\sphericalangle NOC) = 6m(\sphericalangle AOP) = 6x$.

Cum $m(\sphericalangle NOC) = m(\sphericalangle NOM) + m(\sphericalangle MOC) = y + 2y = 3y \Rightarrow 6x = 3y \Rightarrow y = 2x$.

Dar $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^\circ \Rightarrow 2x + 4y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 8x = 180^\circ \Rightarrow 10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$.

Deci, $m(\sphericalangle AOB) = 2x = 36^\circ$, $m(\sphericalangle BOC) = 4y = 8x = 144^\circ$.

b) Fie $[OX$ bisectoarea $\sphericalangle BON \Rightarrow \sphericalangle BOX \equiv \sphericalangle XON \Rightarrow$

$$m(\sphericalangle BOX) = m(\sphericalangle XON) = \frac{m(\sphericalangle BON)}{2} = \frac{y}{2} = x = 18^\circ. \text{ Arătăm că } [OX \text{ este bisectoarea } \sphericalangle MOA.$$

Cum $m(\sphericalangle AOX) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOX) = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$,

iar $m(\sphericalangle XOM) = m(\sphericalangle XON) + m(\sphericalangle NOM) = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$,

avem $\sphericalangle AOX \equiv \sphericalangle XOM \Rightarrow [OX$ bisectoarea $\sphericalangle MOA$.

Barem.

a) $[OP$ bisectoarea $\sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle POB \Rightarrow m(\sphericalangle AOP) = m(\sphericalangle POB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} = x \Rightarrow$ $m(\sphericalangle AOB) = 2x$. $[ON$ bisectoarea $\sphericalangle BOM \Rightarrow \sphericalangle BON \equiv \sphericalangle NOM \Rightarrow m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle NOM) = \frac{m(\sphericalangle BOM)}{2} = y \Rightarrow$ $m(\sphericalangle BOM) = 2y$. $[OM$ bisectoarea	1p
---	----

$\angle BOC \Rightarrow \angle BOM \equiv \angle MOC \Rightarrow m(\angle BOM) = m(\angle MOC) = \frac{m(\angle BOC)}{2} = 2y \Rightarrow m(\angle BOC) = 4y.$	
$m(\angle NOC) = 6m(\angle AOP) = 6x.$	1p
$m(\angle NOC) = m(\angle NOM) + m(\angle MOC) = y + 2y = 3y \Rightarrow 6x = 3y \Rightarrow y = 2x.$	1p
$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180^\circ \Rightarrow 2x + 4y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 8x = 180^\circ \Rightarrow 10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ.$	1p
$m(\angle AOB) = 2x = 36^\circ, m(\angle BOC) = 4y = 8x = 144^\circ.$	1p
b) Fie [OX bisectoarea $\angle BON \Rightarrow \angle BOX \equiv \angle XON \Rightarrow$ $m(\angle BOX) = m(\angle XON) = \frac{m(\angle BON)}{2} = \frac{y}{2} = x = 18^\circ$. Arătam că [OX este bisectoarea $\angle MOA$.	1p
$m(\angle AOX) = m(\angle AOB) + m(\angle BOX) = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ,$ $m(\angle XOM) = m(\angle XON) + m(\angle NOM) = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ,$ $\Rightarrow \angle AOX \equiv \angle XOM \Rightarrow$ [OX bisectoarea $\angle MOA$.	1p

4. Fie triunghiul $\triangle ABC$, cu $m(\angle B) > 90^\circ$ și punctele D și E , $D \in (AB)$, $A \in (BE)$, astfel încât $(BD) \equiv (AE)$. În semiplanul determinat de dreapta AB , care nu conține punctul C , se consideră punctul F astfel încât $\angle DEF \equiv \angle ABC$ și $(EF) \equiv (BC)$. Demonstrați că:

- (3p) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$;
- (1p) $(BF) \equiv (EC)$;
- (3p) segmentele (FC) și (AD) au același mijloc.

Prof. Petru Nicuță, Rădăuți

Soluție: a) Cum $AB = AD + BD$, $DE = AD + AE$, iar $BD = AE$, avem $AB = DE \Rightarrow (AB) \equiv (DE)$ și cum din ipoteză avem $(EF) \equiv (BC)$, $\angle DEF \equiv \angle ABC \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (L.U.L.).

b) Din ipoteză $(EF) \equiv (BC)$, $\angle DEF \equiv \angle ABC$ și (EB) latură comună $\Rightarrow \triangle BEF \equiv \triangle EBC$ (L.U.L.), de unde $(BF) \equiv (EC)$.

c) Notăm $FC \cap BE = \{G\}$. Avem $\triangle EFC \equiv \triangle BCF$ (L.L.L.) $\Rightarrow \angle EFC \equiv \angle BCF$.
 $\triangle EGF \equiv \triangle BGC$ (U.L.U.) $\Rightarrow (GF) \equiv (GC)$, $(GE) \equiv (GB) \Rightarrow GE = GB$, dar $AE = BD$, deci
 $AG = GE - AE = GB - BD = GD \Rightarrow (AG) \equiv (GD)$.

Barem:

Figura	1p
a) $AB = AD + BD$, $DE = AD + AE$, iar $BD = AE$, avem $AB = DE \Rightarrow (AB) \equiv (DE)$	1p
Se demonstrează că $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$	1p
b) Din ipoteză $(EF) \equiv (BC)$, $\angle DEF \equiv \angle ABC$ și (EB) latură comună $\Rightarrow \triangle BEF \equiv \triangle EBC$ (L.U.L.), de unde $(BF) \equiv (EC)$.	1p
c) Notăm $FC \cap BE = \{G\}$. Avem $\triangle EFC \equiv \triangle BCF$ (L.L.L.) $\Rightarrow \angle EFC \equiv \angle BCF$.	1p
$\triangle EGF \equiv \triangle BGC$ (U.L.U.) $\Rightarrow (GF) \equiv (GC)$, $(GE) \equiv (GB)$	1p
$GE = GB$, $AE = BD$, deci $AG = GE - AE = GB - BD = GD \Rightarrow (AG) \equiv (GD)$, deci segmentele (FC) și (AD) au același mijloc.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.