

Soluții clasa a XI-a:

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare cu $a \geq b$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$, unde A_n, B_n reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv de pe diagonala secundară a matricei A^n .

Soluție:

1. a) Se demonstrează prin inducție matematică că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & c^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n \end{pmatrix}$, unde

$$a_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}, \quad b_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) $A_n = 2a_n + c^n = (a+b)^n + (a-b)^n + c^n$ și

$$B_n = 2b_n + c^n = (a+b)^n - (a-b)^n + c^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$ și cum a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi concluzionăm:

$$1. \quad a, b, c > 0,$$

$$2. \quad a + b > c.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b)^n + (a-b)^n + c^n}{(a+b)^n - (a-b)^n + c^n} = 1, \text{ deoarece } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{a+b} \right)^n = 0.$$

2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin: $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$.

a) Arătați că $a_n < 1, \forall n \geq 1$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n$.

Soluție:

2. a) Deoarece $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}, \dots, \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$, prin adunarea acestor inegalități se obține că:

$$a_n < \frac{n}{n^2+1}. \text{ Cum } \frac{n}{n^2+1} < 1, \forall n \geq 1, \text{ rezultă că } a_n < 1, \forall n \geq 1.$$

b) Avem inegalitățile:

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1};$$

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1};$$

.....

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1};$$

După adunarea acestora obținem:

$$\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+n} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} < n \cdot a_n < \frac{n^2}{n^2+n}.$$

$$\text{Dar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 1.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + na_n - 1)^{\frac{1}{na_n-1}} \right]^{n(na_n-1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(na_n-1)}.$$

$$\text{Dar } n \cdot (na_n - 1) = n^2 a_n - n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n^2}{n^2+k} - 1 \right) = - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \text{ și se obține:}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{2}$, de unde obținem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n)^n = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, astfel încât $\text{Tr}(A) = 1$ și $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3} \cdot \det A$.

Demonstrați că: $\det(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2) = \sqrt{3}$.

Soluție:

3. Fie $P = X^2 - X + d$, $d = \det A$ și $\varepsilon = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

($\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$). Atunci:

$$\begin{aligned} \det(A^2 + A + I_2) &= \det[(A - \varepsilon I_2)(A - \bar{\varepsilon} I_2)] = |\det(A - \varepsilon I_2)|^2 = \\ &= |P(\varepsilon)|^2 = |\varepsilon^2 - \varepsilon + d|^2 = |-2\varepsilon - 1 + d|^2 = |d + i\sqrt{3}|^2 = d^2 + 3. \end{aligned}$$

Ținând cont că $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3}d$, din relația de mai sus obținem că $d^2 + 3 \leq 2\sqrt{3}d$, de unde rezultă că: $\det A = \sqrt{3}$.

Cum $\text{Tr}(A) = 1$, folosind teorema Cayley-Hamilton, obținem:

$$A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2 = A \Rightarrow \det(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2) = \sqrt{3}.$$

4. Relația din enunț este echivalentă cu: $x_n^3 \blacktriangleleft_n - x_{n+1} \blacktriangleright x_n^2 - 4x_n + 4, \forall n \geq 1$.

Sau, $x_n^3 \blacktriangleleft_n - x_{n+1} \blacktriangleright \blacktriangleleft_n - 2 \blacktriangleright, \forall n \geq 1$. De aici rezultă că $x_n^3 \blacktriangleleft_n - x_{n+1} \blacktriangleright \geq 0, \forall n \geq 1$.

Deoarece șirul $\blacktriangleleft_n \blacktriangleright_{n \geq 1}$ este strict descrescător, deci $x_n - x_{n+1} > 0, \forall n \geq 1$, rezultă că

$x_n^3 \geq 0, \forall n \geq 1$. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; trecem la limită în relația de recurență și obținem:

$$l^4 - l^2 + 4l - 4 \geq l^4 \Rightarrow \blacktriangleleft - 2 \blacktriangleright \leq 0 \Rightarrow l = 2.$$

Barem de corectare

Clasa a XI-a

Problema 1	Oficiu	1 p
a) Inducție matematică		3p
b) $A_n = 2a_n + c^n = (a+b)^n + (a-b)^n + c^n$		1p
$B_n = 2b_n + c^n = (a+b)^n - (a-b)^n + c^n$		1p
Deoarece $a \geq b \Rightarrow a-b \geq 0$ și cum a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi:		1p
1. $a, b, c > 0$,		
2. $a + b > c$		
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{a+b} \right)^n = 0$		1p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b)^n + (a-b)^n + c^n}{(a+b)^n - (a-b)^n + c^n} = 1$		2p
TOTAL		10p

Problema 2	Oficiu	1 p
a) $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}, \dots, \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$		1p

$a_n < \frac{n}{n^2 + 1}$	1p
Finalizare: $a_n < 1, \forall n \geq 1$.	1p
b) $\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+n}$	1p
Finalizare: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 1$.	1p
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(na_n - 1)}$	1p
$n \cdot (na_n - 1) = -\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}$	1p
$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + 1}$	1p
Finalizare: $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n)^n = e^{-\frac{1}{2}}$	1p
TOTAL	10p

Problema 3	Oficiu 1 p
$P = X^2 - X + d, d = \det A$ și $\varepsilon = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	1p
$\det(A^2 + A + I_2) = d^2 + 3$.	5p
$d^2 + 3 \leq 2\sqrt{3}d$	1p
Finalizare	2 p
TOTAL	10p

Problema 4	Oficiu 1 p
$x_n^3 - x_{n+1} \geq x_n - 2, \forall n \geq 1$	2p
$x_n^3 - x_{n+1} \geq 0, \forall n \geq 1$.	1p
$(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător	1p
$x_n^3 \geq 0, \forall n \geq 1$	1p
Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; trecem la limită în relația de recurență	1p
$l^4 - l^2 + 4l - 4 \geq l^4 \Rightarrow (-2) \leq 0$	2p

Finalizare : $l = 2$	1p
TOTAL	10p