

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

**PROBLEMA 1.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup, iar  $H_1, H_2$  și  $H$  trei subgrupuri ale sale. Să se arate că:

- a)  $H_1 \cap H_2$  este subgrup al lui  $G$ ;
- b)  $H_1 \cup H_2$  este subgrup al lui  $G$ , dacă și numai dacă  $H_1 \subseteq H_2$  sau  $H_2 \subseteq H_1$ ;
- c)  $H \subseteq H_1 \cup H_2$ , dacă și numai dacă  $H \subseteq H_1$  sau  $H \subseteq H_2$ .

**Barem de corectare.**

- a) Dacă  $e$  este elementul neutru al grupului  $G$ , atunci  $e \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ . Dacă  $x, y \in H_1 \cap H_2$ , atunci 
$$\begin{cases} x, y \in H_1 \\ x, y \in H_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y^{-1} \in H_1 \\ x \cdot y^{-1} \in H_2 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H_1 \cap H_2. \text{ Deci } H_1 \cap H_2$$
 este subgrup al lui  $G$ ; ..... (1p)
- b) Evident, dacă  $H_1 \subseteq H_2$  sau  $H_2 \subseteq H_1$ , atunci  $H_1 \cup H_2 \leq G$ .  
Dacă  $H_1 \not\subseteq H_2$  și  $H_2 \not\subseteq H_1$ , atunci există  $x_1 \in H_1 \setminus H_2$  și  $x_2 \in H_2 \setminus H_1$ . Deoarece  $H_1 \cup H_2 \leq G$ , avem  $x_1 \cdot x_2 \in H_1 \cup H_2$ , adică  $x_1 \cdot x_2 \in H_1$  sau  $x_1 \cdot x_2 \in H_2$ , de unde obținem că  $x_2 \in H_1$  sau  $x_1 \in H_2$ , ceea ce contrazice ipoteza. .... (3p)
- c) Evident, dacă  $H \subseteq H_1$  sau  $H \subseteq H_2$ , atunci  $H \subseteq H_1 \cup H_2$ . Dacă  $H \not\subseteq H_1$  și  $H \not\subseteq H_2$ , atunci există  $x \in H \setminus H_1$  și  $y \in H \setminus H_2$ . Așadar,  $x \cdot y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H \setminus (H_1 \cup H_2) \Rightarrow H \not\subseteq H_1 \cup H_2$ , contradicție. .... (3p)

**PROBLEMA 2.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $x, y \in G$ , astfel încât  $x^2 = y^2 = (xy)^2$ . Arătați că  $x^{2020} = y^{2020} = e$ , unde  $e$  este elementul neutru al grupului.

**Barem de corectare.**

- Din  $x^2 = (xy)^2$  și  $y^2 = (xy)^2$ , obținem că  $x = yxy$  și  $y = xyx$ . .... (2p)
- Deci  $xy = yxy \cdot xyx = y(xy)^2x = y^3x = y^3 \cdot yxy = y^4 \cdot xy$ . .... (2p)
- de unde,  $y^4 = e$ . .... (1p)
- Analog, se arată că  $x^4 = e$ . .... (1p)
- Așadar,  $x^{2020} = y^{2020} = e$ . .... (1p)

**PROBLEMA 3.** Să se calculeze  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x} dx$ , unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .

**Barem de corectare.**

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{[x]}{\sin x} dx \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Notăm: } I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x} dx \text{ și } I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{[x]}{\sin x} dx.$$

$$I_1 \stackrel{x=\pi-t}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\pi-t}{\sin t} dt = \pi \ln 3 - I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{2} \ln 3 \dots\dots\dots (3p)$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^2 \frac{1}{\sin x} dx + \int_2^{\frac{2\pi}{3}} \frac{2}{\sin x} dx = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \bigg|_{\frac{\pi}{3}}^2 - 2 \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \bigg|_2^{\frac{2\pi}{3}} = -\ln \frac{\operatorname{tg} 1}{2\sqrt{3}} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Așadar, } I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2} \ln 3 + \ln \frac{\operatorname{tg} 1}{2\sqrt{3}} \dots\dots\dots (1p)$$

**PROBLEMA 4.** Să se determine funcțiile integrabile  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că

$$f(x) - \int_0^1 (x+y) \cdot f(y) dy = x, \quad \forall x \in [0; 1].$$

**Barem de corectare.**

$$\text{Relația din enunț se scrie echivalent } f(x) = \left( \int_0^1 f(y) dy + 1 \right) \cdot x + \int_0^1 y \cdot f(y) dy \dots\dots\dots (3p)$$

$$\text{Deci, funcția } f \text{ are forma } f(x) = ax + b, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Din condiția dată, se obține } a = -6 \text{ și } b = -4, \text{ adică } f(x) = -6x - 4 \dots\dots\dots (2p)$$

---

<sup>1</sup>Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

<sup>2</sup>Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.