Olimpiada naţională de matematică, Etapa locală, 15 februarie 2014,Clasa a XI a, Barem de evaluare

(1) a) de exemplu $A=I_2$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (verificare !); evident, orice alt exemplu corect este luat în considerare !	(2p)
b) Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\det(A+xB)=\left(\det B\right)\cdot x^2+mx+\det A$, $m\in\mathbb{R}$. Din $\det(A^2+B^2)=0$ deducem $\det(A+iB)\det(A-iB)=0$, adică $f(i)=f(-i)=0$ şi astfel $f(x)=k\cdot\left(x^2+1\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Concluzia e imediată.	(3p)
c) chestiune de creaţie, aşadar aşteptăm să vedem ce sunt în stare elevii acestei generaţii ! oricum, probabil mai mult decât noi (în ceea ce priveşte creativitatea)… punctaţi ca atare !	(2p)
(2) $(A+iB)^2=(A-iB)^2 \Rightarrow \det\left(A+iB\right)=\pm\det(A-iB)$	(3p)
aşadar $P(i)=\pm P(-i)$, deci $P(i)=\pm\overline{P(i)}$	(2p)
Dacă $P(i)=\overline{P(i)}$, atunci $P(i)\in\mathbb{R}$	(1p)
Dacă $P(i)=-\overline{P(i)}$, atunci $\frac{P(i)}{i}\in\mathbb{R}$.	(1p)
(3) $2\le x_n-y_n\le\sqrt{2(x_n{}^2+y_n{}^2)}$ şi, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2(x_n{}^2+y_n{}^2)}=2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)=2$	(4p)
Cum $1\le x_n\le x_n+y_n-1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+y_n-1\right)=1$ se ajunge la $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$; analog $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$	(3p)
(4)	
$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow 1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1,\ \forall x>0$ şi $1-x>x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ge 1, \forall x<0$. Prin trecere la limită în origine, avem că ambele limite laterale sunt egale: $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$.	(7p)