

Barem cls. a XII-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1. f bijectivă deci inversabilă. Din $f(x * y) = f(x)f(y) = xy - x - y + 1$ rezultă
 $x * y = f^{-1}(xy - x - y + 1)$3 p
 Din $f(x) = x - 1$ rezultă $f^{-1}(x) = x + 1$ și $x * y = xy - x - y + 2, x, y \in G$ 2 p
 Se verifică faptul că $(G, *)$ este grup. 2 p

2. Notând $\frac{\pi}{2} - x = t$ și $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$ rezultă $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t + \cos t}{\cos t + \sin t + 1} dt =$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 t - \sin t + \cos t + \sin t}{\cos t + \sin t + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos t + \sin t - \sin^2 t - \sin t}{\cos t + \sin t + 1} dt$3 p
 Deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos t + \sin t - \sin^2 t - \sin t}{\cos t + \sin t + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 t + \sin t}{\sin t + \cos t + 1}\right) dt = \frac{\pi}{2} - I,$
 $2I = \frac{\pi}{2}, I = \frac{\pi}{4}$ 4 p

3. $A = \{x_1, x_2, x_3\}, f: A \rightarrow A, f(x) = x + a$ este injectivă
 A finită rezultă f bijectivă și $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = x_1 + x_2 + x_3$3 p
 $x_1 + x_2 + x_3 + \hat{3}a = x_1 + x_2 + x_3$, deci $\hat{3}a = \hat{0}, a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{\hat{0}\}$,
 rezultă $a \in \{\hat{2}, \hat{4}\}$. Pentru $a = \hat{2}, f(x) = x + \hat{2}$, va rezulta $A = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ și
 $A = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$, iar pentru $a = \hat{4}, f(x) = x + \hat{4}$, va rezulta $A = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ și
 $A = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$ 4 p

4. a) $f(1) = \int_0^1 \frac{t}{2t+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{2t+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2t+1}\right) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln 3$2 p
 b) $2f(x+1) + f(x) = \int_0^1 \frac{2t^{x+1} + t^x}{2t+1} dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$ 2 p
 c) Funcția $g(x) = \frac{t^x}{2t+1}, t \in (0,1)$ este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$
 Va rezulta $f(x+1) < f(x)$ și, folosind relația de la b), $\frac{1}{x+1} < 3f(x)$ 1 p
 Pentru $x \geq 2$, din $2f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x}$ și $f(x-1) > f(x)$ rezultă $\frac{1}{x} > 3f(x)$,
 $\frac{1}{3(x+1)} < f(x) < \frac{1}{3x}$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \frac{1}{3}$ 2 p

