Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 16 februarie 2024

Barem Clasa a VIII-a

1. **Demonstrați că $\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} \in [0,1]$, pentru orice $x, y \in [0,1]$.**

Soluție:

Cum $x \in [0,1]$, atunci $(1-x) \in [0,1]$ și deci

$x(1-x) \geq 0$ care duce la $\sqrt{x(1-x)} \geq 0$.

Cum $y \in [0,1]$, atunci $(1-y) \in [0,1]$ și deci

$y(1-y) \geq 0$ care duce la $\sqrt{y(1-y)} \geq 0$.

$$\sqrt{x(1-x)} \geq 0$$
$$\sqrt{y(1-y)} \geq 0$$

Adunând cele două relații obținem că

$\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} \geq 0$ (1)……………………………………………………3p

Folosind inegalitatea mediilor, avem că

$$\frac{x+(1-x)}{2} \geq \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{x(1-x)}$$
$$\frac{y+(1-y)}{2} \geq \sqrt{y(1-y)} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{y(1-y)}$$

Obținem că $1 \geq \sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)}$ (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă cerința problemei……………………………………..4p

2. **Numerele $\sqrt{x+70\sqrt{2}}$ și $\sqrt{x-70\sqrt{2}}$ au diferența egală cu 14. Arătați că x este număr natural.**
Soluție:

Se impun condițiile $\sqrt{x+70\sqrt{2}} > \sqrt{x-70\sqrt{2}}$ și $x \geq 70\sqrt{2}$

$$\sqrt{x+70\sqrt{2}} - \sqrt{x-70\sqrt{2}} = 14$$

Ridicăm ambii membri ai ecuației la pătrat și obținem:

$x+70\sqrt{2}+x-70\sqrt{2}-2\sqrt{x^2-2\cdot 4900} = 14^2$..3p

$2x-2\sqrt{x^2-9800} = 196$; $\sqrt{x^2-9800} = x-98 \geq 0$, adevărat, deoarece $x \geq 70\sqrt{2} > 98$

$x^2-9800 = x^2-196x+98^2$; $196x = 98^2+9800 = 98(98+100)$; $2x = 198$

Rezultă $x = 99 > 70\sqrt{2}$, deci $x = 99 \in N$...4p

3. **Se considera piramida patrulatera VABCD cu varful V si cu toate muchiile congruente. Pe muchia laterala VA se alege punctul M astfel incat $\frac{VM}{VA} = \frac{2}{3}$, iar pe muchia laterala VD se alege punctul N astfel incat $\frac{ND}{VD} = \frac{1}{3}$. Calculati masura unghiului determinat de MN cu VB.**

Soluție:

Cum toate muchiile sunt egale, $\Delta\, VBC$ este echilateral
Din $\frac{ND}{VD} = \frac{1}{3}$, rezulta $\frac{VN}{VD} = \frac{2}{3} = \frac{VM}{VA}$ 3p
Aplicand Reciproca Teoremei lui Thales avem ca MN∥AD
Dar AD∥ BC, atunci MN∥ BC 2p
∢(VB,MN)=∢(VB,BC)=$\sphericalangle\, VBC = 60°$ 2p

4. Fie $VABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei $AB = 4$ cm și muchia laterală $VA = 8$ cm. Punctul Q este situat pe muchia VB, astfel încât $BQ = 2$ cm.

a) Aflați distanța de la punctul Q la dreapta CF.

b) Demonstrați că $VE \parallel (AQC)$.

<u>Soluție</u>

a)Fie O centrul hexagonului și T=$pr_{(ABC)}Q$. Atunci $T \in OB$ și $\frac{QT}{VO} = \frac{BQ}{BV} = \frac{BT}{BO}$, de unde

$BT = 1$cm și $QT = \sqrt{3}$cm……………………………………………………………………2p

Construim $TX \perp FC, X \in FC$. Atunci $QT \perp (ABC), CF \subset (ABC), TX \perp OC,$ astfel că $d(Q, CF) = XQ$………………………………………………………………………………1p

Din triunghiul $QXT, QX = \sqrt{QT^2 + TX^2} = \sqrt{3 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$cm………………………………1p

b)$ABCO$ este romb, fie $\{S\} = OB \cap CA$. Atunci $\frac{BS}{BE} = \frac{BQ}{BV} \left(= \frac{1}{4}\right)$, deci $QS \parallel VE$, conform reciprocei teoremei lui Thales. Cum $QS \parallel VE$ și $QS \subset (AQC)$, obținem că $VE \parallel (AQC)$ ……..3p