

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a X-a

Subiectul 1. Fie $u, v \in \mathbb{C}$ astfel încât $|u| = |v|$ și $2|u + v| \geq |u + 3v|$.
Demonstrați că $u = v$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie $a, b \in (1, \infty)$. Rezolvați ecuația:

$$a^x b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}} b^x = 2ab.$$

Subiectul 3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

- a) Reprezentați grafic funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $g(x) = f(x) + f(1 - x)$.
b) Calculați suma:

$$S = f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \cdots + f\left(\frac{98}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right).$$

Subiectul 4. Fie $K > 0$ și $A > B > a > 1$. Demonstrați că:

$$\text{a) } \frac{A}{B} > \frac{A + K}{B + K}; \quad \text{b) } 1 + \log_a \frac{A}{B} > \log_{B+K} (A + K).$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.