

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală Dâmbovița
17-02-2019
Clasa a IX-a

Subiectul 1. a) Arătați că : i) dacă $x \in \mathbb{Z}$, $[x] + [-x] = 0$

ii) dacă $x \notin \mathbb{Z}$, $[x] + [-x] = -1$.

b) Rezolvați ecuația: $[-2x] + [-x] + [x] + [2x] + 1 = 0$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Subiectul 2. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.

Subiectul 3. Dacă numerele $a, b, c \geq 0$ satisfac relația $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, arătați că:

$$\frac{a^2}{1+nbc} + \frac{b^2}{1+nca} + \frac{c^2}{1+nab} \geq \frac{3}{n+3}, \text{ pentru orice număr natural } n.$$

Subiectul 4. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ înscrise într-un cerc de centru O . Dacă $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ sunt ortocentrele triunghiurilor $BAA', CAA', CBB', ABB', ACC'$ și respectiv BCC' , demonstrați că $\overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_3H_4} + \overrightarrow{H_5H_6} = \vec{0}$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.