MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA a XII– a

1. a) Calculaţi $\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+t+1} dt,\ x>0$.

b) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+t+1} dt$.

(G.M. 6-7-8/2012)

2. Să se calculeze $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} \cdot e^x \cos x dx$, $x>-1$.

Giurgi Vasile

3. Fie $G=(-1,1)$ şi aplicaţia $x\circ y=\frac{x+y}{1+xy}, \forall x,y\in G$, iar $f:\mathbb{R}\to G,\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

a) Arătaţi că $(G,\circ)$ este grup abelian.

b) Admitem că f este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,\circ)$ să se calculeze $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{de\,2013\ ori}$, unde $x\in G$.

4. a) Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există $a\in G$ astfel încât $ax=x^3a$, $\forall x\in G$. Să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este un grup abelian.

b) Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin $n>2$ cu $(n,2013)=1$. Să se arate că, dacă $x^{2013}y^{2013}=y^{20103}x^{2013}, \forall x,y\in G,$ atunci grupul $(G,\cdot)$ este comutativ.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Tomoiagă Ioan, Colegiul Naţional „Dragoş Vodă”, Sighetu Marmaţiei.
prof. Giurgi Vasile, Colegiul Naţional „Dragoş Vodă”, Sighetu Marmaţiei.

SUCCES!