

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2018
ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2018
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VI-a

Problema 1. (7 puncte)

Aflați numerele naturale a și b știind că: $\frac{(a, b)}{6} = \frac{a-b}{a+b}$,
unde (a, b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Soluție. $\frac{a-b}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{(a, b)}{6} < 1 \Rightarrow (a, b) < 6 \Rightarrow (a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. . . (1p)

Fie $(a, b) = d \Rightarrow a = dx$, $b = dy$, $(x, y) = 1$ (1p)

Dacă $d = 1 \Rightarrow a = x$, $b = y \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{x-y}{x+y} \Leftrightarrow x+y = 6x-6y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x = 7y \Rightarrow x = 7$ și $y = 5$, adică $a = 7$ și $b = 5$ (1p)

Dacă $d = 2 \Rightarrow a = 2x$, $b = 2y \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{2x-2y}{2x+2y} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{x-y}{x+y} \Leftrightarrow x+y = 3x-3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 4y \Leftrightarrow x = 2y \Rightarrow x = 2$ și $y = 1$, adică $a = 4$ și $b = 2$ (1p)

Dacă $d = 3 \Rightarrow a = 3x$, $b = 3y \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{3x-3y}{3x+3y} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x-y}{x+y} \Leftrightarrow x+y = 2x-2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3y \Rightarrow x = 3$ și $y = 1$, adică $a = 9$ și $b = 3$ (1p)

Dacă $d = 4 \Rightarrow a = 4x$, $b = 4y \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{4x-4y}{4x+4y} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{x-y}{x+y} \Leftrightarrow 2x+2y = 3x-3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 5y \Rightarrow x = 5$ și $y = 1$, adică $a = 20$ și $b = 4$ (1p)

Dacă $d = 5 \Rightarrow a = 5x$, $b = 5y \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{5x-5y}{5x+5y} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{x-y}{x+y} \Leftrightarrow 5x+5y = 6x-6y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 11y \Rightarrow x = 11$ și $y = 1$, adică $a = 55$ și $b = 5$ (1p)

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră numărul

$$a = \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2018} \right)^n \cdot \frac{2019^n}{2^n}$$

- a). Arătați că $a \in \mathbb{N}$.
b). Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că a are 2025 divizori.

Soluție. a). $a = \left(1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{2018 \cdot 2019} \right)^n \cdot \frac{2019^n}{2^n} \dots (1p)$

$$a = \left[1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) \right]^n \cdot \frac{2019^n}{2^n} \dots (1p)$$

$$a = \left[1 + 2 \cdot \frac{2017}{2019 \cdot 2} \right]^n \cdot \frac{2019^n}{2^n} = \frac{4036^n}{2019^n} \cdot \frac{2019^n}{2^n} \dots (1p)$$

$$a = \frac{2^n \cdot 2018^n}{2019^n} \cdot \frac{2019^n}{2^n} = 2018^n \in \mathbb{N} \dots (1p)$$

b). $a = 2018^n \Leftrightarrow a = 2^n \cdot 1009^n \dots (1p)$

nr. divizorilor este $(n+1)(n+1) = 2025 \dots (1p)$

adică $(n+1)^2 = 45^2 \Leftrightarrow n = 44 \dots (1p)$

Problema 3. (7 puncte)

În jurul unui punct se consideră unghiurile $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{16}$, cu interioarele disjuncte, ale căror măsuri se exprimă prin numere naturale consecutive.

- a). Aflați măsurile unghiurilor.
b). Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor u_2 și u_{14} .

Soluție. a). $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{16} = 360^\circ \dots (1p)$

$$n + n + 1 + n + 2 + \dots + n + 15 = 360^\circ \dots (1p)$$

$$16n + 120^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow 16n = 240^\circ \Leftrightarrow n = 15^\circ \dots (1p)$$

măsurile unghiurilor sunt $15^\circ, 16^\circ, 17^\circ, \dots, 30^\circ \dots (1p)$

- b).** măsura unghiului format de bisectoare este

$$\frac{u_2}{2} + u_1 + u_{16} + u_{15} + \frac{u_{14}}{2} = 8^\circ + 15^\circ + 30^\circ + 29^\circ + 14^\circ = 96^\circ \dots (3p)$$

Problema 4. (7 puncte)

Punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{30}$ sunt coliniare în această ordine, $A_1A_2 = 1\text{ cm}$, $A_2A_3 = 4\text{ cm}$, $A_3A_4 = 7\text{ cm}$, $\dots$, $A_{29}A_{30} = 85\text{ cm}$.

- a). Aflați lungimea segmentului $[A_{17}A_{19}]$.
- b). Arătați că mijlocul segmentului $[A_1A_{30}]$ nu coincide cu niciunul din punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{30}$.

Soluție. a). Lungimile segmentelor sunt numere de forma $3(k-1)+1$ **(1p)**

$$A_{17}A_{19} = A_{17}A_{18} + A_{18}A_{19} = 3 \cdot 16 + 1 + 3 \cdot 17 + 1 = 49 + 52 = 101 \quad \textbf{(1p)}$$

b). Presupunem că mijlocul segmentului $[A_1A_{30}]$ coincide cu unul dintre punctele date. Fie A_k acest punct, $1 < k < 30$. Atunci $A_1A_k = A_kA_{30}$ și $A_1A_{30} = 2A_1A_k = 2A_kA_{30}$, deci A_1A_{30} este un număr par **(2p)**

$$\text{Dar } A_1A_{30} = 3 \cdot 0 + 1 + 3 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 2 + 1 + \dots + 3 \cdot 28 + 1 \quad \textbf{(1p)}$$

$$\text{Adică } A_1A_{30} = 3(1 + 2 + 3 + \dots + 28) + 29 = 1247 \text{ nr. impar} \quad \textbf{(1p)}$$

Deci presupunerea făcută este falsă. Așadar mijlocul segmentului $[A_1A_{30}]$ nu coincide cu niciunul din punctele date **(1p)**