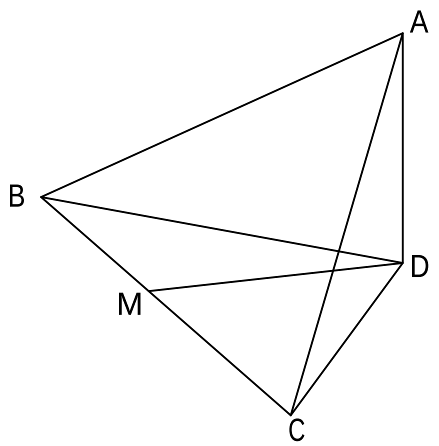
Olimpiada de matematică
Etapa locală 16.02. 2013
Barem de notare clasa a VIII–a

Soluție problema 1	
a) $x^2 = \|x\|^2$	1p
Rezultă $x^2 + 8 - 4\sqrt{2}\|x\| = \left(\|x\| - 2\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$	1p
b) Deoarece $a^2 = \|a\|^2$ şi $b^2 = \|b\|^2$ inegalitatea din enunț se scrie $\left(\|a\| - 4\right)^2 + \left(\|b\| - 2\sqrt{2}\right)^2 \leq 0$	2p
Cum termenii din membrul stâng sunt nenegativi, singura posibilitate este ca $\|a\| - 4 = 0$ şi $\|b\| - 2\sqrt{2} = 0$	1p
$\|a\| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$ şi $\|b\| = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$	1p
$(a,b) \in \left\{\left(4, 2\sqrt{2}\right), \left(4, -2\sqrt{2}\right), \left(-4, 2\sqrt{2}\right), \left(-4, -2\sqrt{2}\right)\right\}$	1p
Total punctaj problema 1	**7 p**
Soluție problema 2	
a) $a_2 = a_1\left(1 - \sqrt{a_1}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$	1p
b) Dacă $a_1 = \frac{1}{2}$, rezultă $0 < a_1 < 1$. Apoi $0 < a_1 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \sqrt{a_1} < 1 \Rightarrow 0 < a_1\left(1 - \sqrt{a_1}\right) < 1$, deci $0 < a_2 < 1$	1p
Din aproape în aproape rezultă $0 < a_3 < 1$, $0 < a_4 < 1, ..., 0 < a_{10} < 1$, adică dacă $x \in M$, atunci $0 < x < 1$	1p
c) Fie un elemnt a_k din mulțimea M. Atunci $a_{k+1} = a_k\left(1 - \sqrt{a_k}\right)$, pentru oricare $k \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$	1p
Rezultă $a_{k+1} = \frac{a_k(1 - a_k)}{1 + \sqrt{a_k}}$, de unde $a_{k+1}\left(1 + \sqrt{a_k}\right) = a_k(1 - a_k)$	1p
Rezultă $a_k^2 = a_k - a_{k+1} - a_{k+1}\sqrt{a_k} < a_k - a_{k+1} \Rightarrow a_k^2 < a_k - a_{k+1}$, deci:	1p
$\left.\begin{array}{l} a_1^2 < a_1 - a_2 \\ a_2^2 < a_2 - a_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_9^2 < a_9 - a_{10} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_9^2 < a_1 - a_{10} < a_1$, de unde concluzia.	1p
Total punctaj problema 2	**7 p**

Soluție problema 3		
	În figura alăturată $AD \perp \alpha$ şi M mijlocul ipotenuzei BC Rezultă $\sphericalangle\left((ABC),\alpha\right) = \sphericalangle AMD$	1p
	Considerând $AB = a$ obţinem $BC = a\sqrt{2}$, de unde $BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	1p
	În ΔAMB, dreptunghic în M, $\sphericalangle ABM = 45^\circ$, de unde $AM = BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	1p
	În ΔAMD, dreptunghic în D, $\sphericalangle AMD = 45^\circ$, de unde $AD = DM = \frac{a}{2}$	1p
	În ΔADC, dreptunghic în D, $AC = a$ şi $AD = \frac{a}{2}$, ceea ce implică $\sphericalangle ACD = 30^\circ$,	1p
	relaţie echivalentă cu $\sphericalangle(AC,\alpha) = 30^\circ$	1p
	Congruența $\Delta ADC \equiv \Delta ADB$ asigură $\sphericalangle(AC,\alpha) = \sphericalangle(AB,\alpha) = 30^\circ$	1p
Total punctaj problema 3		**7 p**

Soluție problema 4	
Reprezentarea unui cub prin desen.	1p
Considerând mijloacele laturilor cubului obținem 8 cuburi cu latura de lungime 1.	1p
Atunci din cele 9 puncte cel puțin două se află în interiorul sau pe suprafața unui cub cu latura de lungime 1.	2p
Distanța maximă dintre două puncte situate în interiorul sau pe suprafața unui cub este egală cu lungime diagonalei cubului.	1p
Diagonala unui cub cu latura de lungime 1 are lungimea $\sqrt{3}$, ceea ce demonstrează cerința.	2p
Total punctaj problema 4	**7 p**