S.S.M.R - FILIALA MURES

# Olimpiada de matematică
# Faza locală 9.02.2013
# Clasa a V-a
# Barem de evaluare

**1.** Comparați numerele:

$$A=\{[2^3\cdot 5^2+(25^{50}:5^{99}+2^2\cdot 3)\cdot 5^2]:5^3+2^7+11^{1991}:(11^2)^{995}\}:(3^3+3^2)$$
$$B=2^{100}:[2^{40}\cdot 2^{56}+(2^{12}\cdot 2^{13})^5:2^{29}+(5^{35}:5^{34}-1)^{45}\cdot 2^6+(2^{32})^3]$$

**Soluție:**

**1p oficiu**

$A=\{[2^3\cdot 5^2+(25^{50}:5^{99}+2^2\cdot 3)\cdot 5^2]:5^3+2^7+11^{1991}:(11^2)^{995}\}:(3^3+3^2)$
$A=\{[8\cdot 25+(5^{100}:5^{99}+4\cdot 3)\cdot 25]:125+128+11^{1991}:11^{1990}\}:(27+9)$
$A=\{[200+(5+12)\cdot 25]:125+128+11\}:36$
$A=[(200+17\cdot 25):125+139]:36$
$A=[(200+425):125+139]:36$
$A=(625:125+139):36$
$A=(5+139):36$
$A=144:36$
$A=4$ ................................................................................................ **3p**
$B=2^{100}:[2^{40}\cdot 2^{56}+(2^{12}\cdot 2^{13})^5:2^{29}+(5^{35}:5^{34}-1)^{45}\cdot 2^6+(2^{32})^3]$
$B=2^{100}:[2^{96}+(2^{25})^5:2^{29}+(5-1)^{45}\cdot 2^6+2^{96}]$
$B=2^{100}:[2^{96}+2^{125}:2^{29}+4^{45}\cdot 2^6+2^{96}]$
$B=2^{100}:[2^{96}+2^{96}+4^{96}+2^{96}]$
$B=2^{100}:[2^{96}(1+1+1+1)]$
$B=2^{100}:(2^{96}\cdot 4)$
$B=2^{100}:2^{98}$
$B=4$ ................................................................................................ **3p**
Deci, $A=B$

**2.** Arătați că nu există numere naturale $x$, $y$ astfel încât $5x^2+3y^2=2013^{2012}$

**Soluție**

**1p oficiu**

$u(5x^2)\in\{0,5\}$ ................................................................................ **1p**
$u(y^2)\in\{0,1,4,5,6,9\}\Rightarrow u(3y^2)\in\{0,2,3,5,7,8\}$ ............................................... **1p**

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

Deci, $u(5x^2+3y^2)\in\{0,2,3,5,7,8\}$.................................................................. **1p**

Dar, $u(2013^{2012})=u(3^{4\cdot503})=1$ ........................................................................ **2p**

$\Rightarrow 5x^2+3y^2\neq 2013^{2012}$ pentru orice $x, y$ numere naturale. **........................... 1p**

**3.** Aflaţi numărul maxim de pagini ale unei cărţi, ştiind că cifra 3 s-a folosit la numerotarea paginilor sale de 71 de ori. (Gazeta Matematică)

**Soluție**

**1p oficiu**

De la 1 la 100 cifra 3 s-a folosit de 20 de ori:

- o dată la fiecare din cele 10 zeci pe locul unităţilor **1p**
- de 10 ori pe locul zecilor de la 30 până la 39 **1p**

De 20 de ori apare 3 de la 101 la 200 **1p**

De 20 de ori apare de la 201 pană la 299 **1p**

20+20+20=60

De 11 ori apare in numerele 300; 301; 302; 303; 304; 305; 306; 307; 308; 309 **1p**

Cartea are 309 pagini **1p**

**4.** Un elev trebuie să rezolve 24 de probleme în patru zile. În fiecare zi rezolvă mai multe probleme decât în ziua precedentă. În ziua a patra rezolvă de cinci ori mai multe probleme decât în prima zi. Care este numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în ziua a treia?

(Gazeta Matematică, 2012)

**Soluție**

**1p oficiu**

**Cazul I**

Presupunem că în prima zi elevul rezolvă **o problemă**.Atunci în ziua a IV-a rezolvă **5** probleme **(1p).**
Deci numărul maxim de probleme rezolvate în a III-a zi este **4**, iar a II-a zi rezolvă **2** sau **3** probleme. În total elevul rezolvă 18 sau 19 probleme **( 2p). Nu este convenabil.**

**Cazul II**

Dacă în prima zi elevul rezolvă **2 probleme**, atunci în ziua a IV-a rezolva **10** probleme **(1p).**
Deducem că numărul maxim de probleme rezolvate în a III-a zi este **9**, iar a II-a zi rezolvă minim (obligatoriu) **3 probleme deci în total 24. ( 2p).**

**Cazul III**

Dacă în prima zi elevul rezolvă **3 probleme,** atunci în ziua a IV-a rezolvă **15** probleme, iar a II-a zi rezolvă 4 probleme (nr.minim obligatoriu), deci în a III-a zi mai are de rezolvat **2 probleme** situaţie ce contrazice datele problemei.

În final **numărul maxim** de probleme rezolvate a III-a zi este 9.

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim